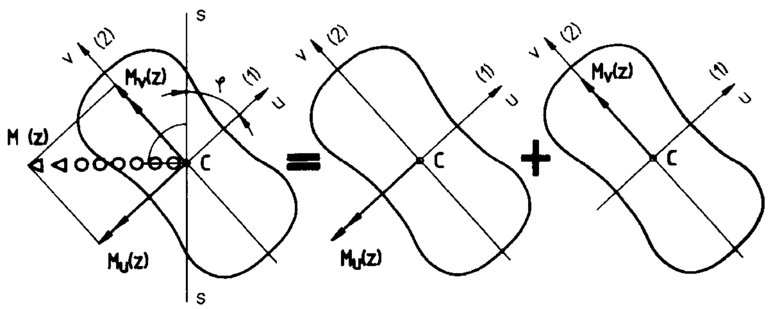
# КОСО САВИЈАЊЕ

У досадашњим разматрањима, када је била реч о напрезању на савијање, објашњен је случај савијања око једне од главних тежишних равни инерције, при чему се раван дејства оптерећења поклапала са другом главном тежишном равни.

Напрезање које настаје услед савијања силама и моментима који не делују у главним равнима (равнима које садрже главне тежишне осе), односно заклапају неки угао са једном од главних тежишних равни инерције (Сл.10.1) називамо **косо савијање**.




*Слика10.1 Попречни пресек носача изложен косом савијању*

Резултујући вектор момента је управан на траг равни оптерећења *s-s* и може се разложити на компопненте у главним равнима.

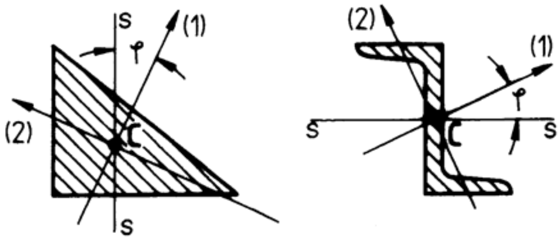
$M_1(z) \equiv M_u(z) = -\, M(z) \cos\varphi$

$M_2(z) \equiv M_v(z) = +\, M(z) \cos\varphi.$

Величине $M_1\ (z)$ и $M_2\ (z)$ представљају нападне моменте савијања око главних оса (*1,u*) и (*2,v*) у произвољном попречном пресеку. **Угао $\varphi$ је дефинисан као најмањи угао између позитивног смера осе (*1,u*) и трага равни дејства оптерећења**. Знак момента је позитиван ако се његов правац поклапа са позитивним смером главне осе око које се врши савијање.

Размотримо неке карактеристичне попречне пресеке и положај трага равни дејства оптерећења (*s - s*) у односу на положај главних тежишних оса инерције (Сл.10.2).

За случај попречних пресека (Сл.10.2), траг равни дејства оптерећења заклапа неки угао са правцима главних тежишних оса инерције, па имамо случај косог савијања.




*Слика 10.2 Неки случајеви косог савијања и савијања око главне осе*

### Нормални напони код косог савијања

Видимо да се овако дефинисан случај косог савијања може разматрати као збир два посебна случаја савијања око главних тежишних оса (*1*) и (*2*) (Сл.10.1).

**Пошто су вектори напона оба савијања колинеарни, укупан напон добијамо као алгебарски збир нормалних напона око главних оса.**

Израз за укупни напон при косом савијању има облик:

$$\sigma = \sigma(u,v,z) = -\frac{M_1(z)}{I_1}v + \frac{M_2(z)}{I_2}u = M(z)\cdot\left(\frac{\sin\varphi}{I_1}v + \frac{\cos\varphi}{I_2}u\right) \quad . (10.1)$$

То значи да напон у произвољној тачки А попречног пресека добијамо ако у претходни образац заменимо њене кординате ($u_A$, $v_A$).

### Неутрална линија

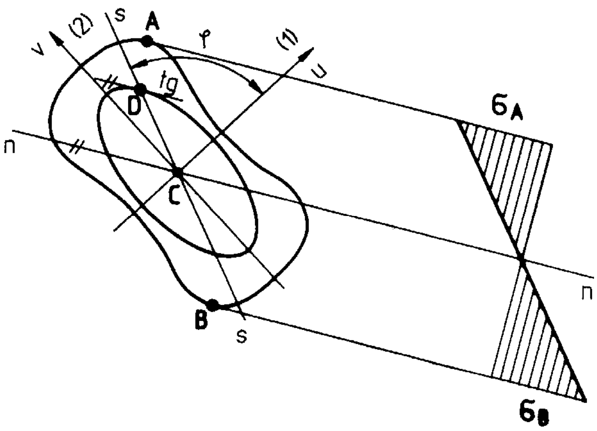
Из израза (10.1) закључили смо да је расподела нормалног напона по попречном пресеку линеарна функција координата $u$ и $v$ .

Поновимо, **неутрална линија је геометријско место тачака попречног пресека за које је вредност напона једнака нули**. У овом случају имамо:

$$\sigma(u,v,z)_{z=z_0} = -\frac{M_1(z_0)}{I_1}v + \frac{M_2(z_0)}{I_2}u = 0, \qquad (10.2)$$

па неутралну линију (Сл. 10.3) сада дефинишемо изразом:

$$v = k\cdot u \quad , \quad \mathrm{k} = \frac{I_1}{I_2}\cdot\frac{M_v(z_0)}{M_u(z_0)} = -\frac{I_1}{I_2}\cdot ctg\varphi. \qquad (10.3)$$




*Слика 10.3 Неутрална линија и њене особине*

Неутрална линија има следеће особине:
- неутрална линија дели попречни пресек на поље затезања и поље притиска,
- неутрална линија пролази кроз супротне квадранте од квадранта кроз које пролази траг равни оптерећења и никад није управна на њега,
- неутрална линија је права паралелна тангенти повученој на елипсу инерције у тачки пресека елипсе инерције и трага равни дејства оптерећења.

Највеће вредности нормалног напона добијамо у тачкама најудаљенијим од неутралне линије (Сл.10.3).

## Провера носивости носача изложеног косом савијању

При провери носивости носача изложеног косом савијању потребно је урадити следеће:

- наћи вредности главних тежишних момената инерције $I_1$ и $I_2$, као и правац главних тежишних оса инерције,

- одредити величине нападних момената савијања у обе главне равни дуж осе носача $M_1 = M_1(z)$ и $M_2 = M_2(z)$, односно величину угла $\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ и $\mathrm{ctg}\,\varphi$, уколико прорачунавамо нормални напон помоћу (10.4),

- одредити опасни пресек, односно пресек у коме резултујући момент савијања има највећу вредност $M_{max}$,

- за тај пресек наћи једначину неутралне линије и нацртати је,

- у дијаграму $u$, $v$ нацртати неутралну линију и одредити координате најудаљенијих тачака $A(u_A, v_A)$ и $B(u_B, v_B)$,

- поставити услов да максимални напон за тај пресек не сме прећи дозвољену вредност напона на затезање $\sigma_{de}$ и притисак $\sigma_{dp}$ у одговарајућим тачкама,

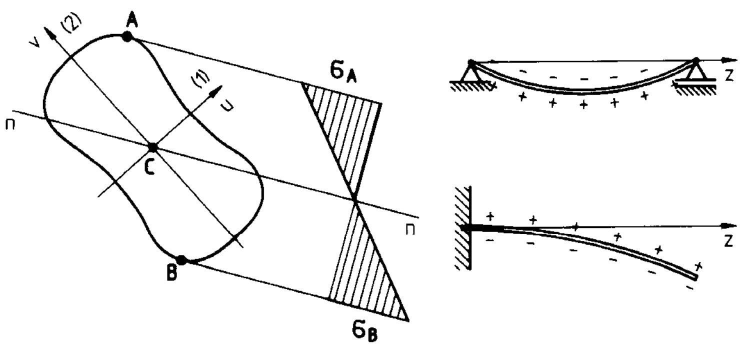
- израчунати непознату величину.

За нпр. просту греду приказану на слици (Сл.10.4) би у том случају важило:

$|\sigma_A| \leq |\sigma_{dp}|$ ; $\sigma_B \leq \sigma_{de}$ , (10.4)

а за конзолу

$\sigma_A \leq \sigma_{de}$; $|\sigma_B| \leq |\sigma_{dp}|$ . (10.5)




*Слика 10.4 Одређивање знака напона на контури носача*

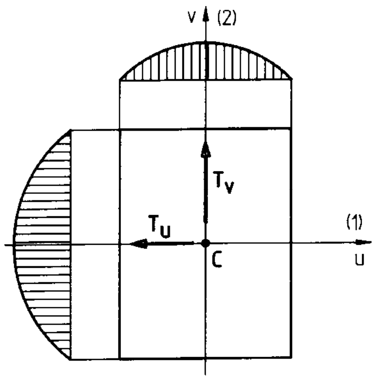
### Напони смицања при косом савијању

Пошто у попречном пресеку делују две трансверзалне (попречне) силе (попречну силу $T(z)$ за посматрани попречни пресек можемо разложити у правцима главних оса $T_u = T_u(z)$ и $T_v = T_v(z)$), имамо и два напона смицања које је протребно суперпонирати. Треба рећи да се они налазе у две управне главне равни. Изрази за наведене напоне смицања су:

$$\tau_{zu} = \frac{T_u(z)}{I_2} \cdot \frac{\overline{S_v}(z)}{\xi_v} \quad , \quad \tau_{zv} = \frac{T_v(z)}{I_1} \cdot \frac{\overline{S_u}(z)}{\xi_u} \quad . \qquad (10.6)$$

За случај правоугаоног поречног пресека израз за резултујући напон смицања (Сл. 10.5) има облик:

$$\tau = \sqrt{\tau_{zu}^2 + \tau_{zv}^2} \quad . \qquad (10.7)$$



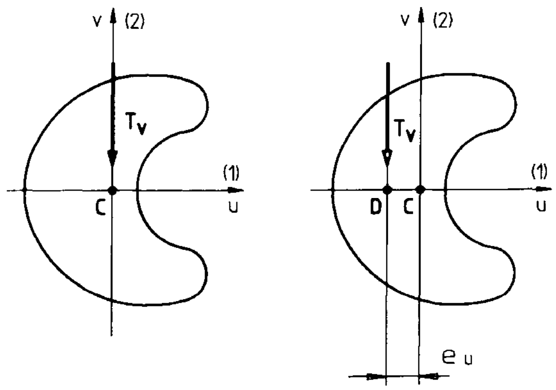

*Слика 10.5 Израчунавање највећег напона смицања*

Максимални напон смицања је у тачки (*u=0, v=0*), пошто су оба напона смицања у тој тачки максимална.

## Центар смицања

Све уведне претпоставке за савијање око главне осе задржане су и у случају косог савијања. Досадашња разматрања напрезања на савијање повлаче закључак да је раван у којој делује оптерећење које изазива савијање уједно и раван симетрије попречног пресека. За косо савијање, у том случају, потребно је да обе главне равни буду равни симетрије попречног пресека.

Размотримо случај да раван оптерећења које изазива савијање није раван симетрије (Сл. 10.6).




*Слика 10.6 Центар смицања*

У овом случају једначина равнотеже за момент око подужне осе за попречни пресек неће бити задовољена

$$M_t = \int_A ( y\,\tau_{zu} - x\,\tau_{zv} )dA \neq 0 \quad . \qquad (10.8)$$

То значи да ће под дејством попречне силе доћи и до померања и до обртања попречног пресека у својој равни, па ће поред смицања доћи и до увијања носача.

До обртања неће доћи у колико попречна сила не делује у тежишту пресека. Момент увијања од попречне силе треба да поништи момент увијања настао од напона смицања. То значи, да би се поништио утицај напона смицања неопходно је померити правац дејства оптерећења за величину $e_u$ пошто ће у том случају бити задовољен услов $M_t = 0$.

Тачку таквог дејства силе називамо **центар смицања**. Координата $e_u$ центра смицања дата је изразом:

$$e_u = -\frac{\int_A (y\,\tau_{zu} - x\tau_{zv})dA}{T_v} \quad . \qquad (10.8)$$

Разматрање за једну главну осу може се у потпуности применити и за другу осу, уколико и она није оса симетрије.

Тачка чије су координате $S$ ($e_u$, $e_v$) назива се **центар смицања**.

Неузимање у обзир овог ефекта може понекад довести до знатног смањења носивости конструкције па и њеног попуштања. Овај ефекат има знатан утицај, нарочито код танкозидих попречних пресека.

# ПОДУЖНО НАПРЕЗАЊЕ СА САВИЈАЊЕМ НОСЕЋЕГ ЕЛЕМЕНТА
**(Ексцентрично напрезање силом)**

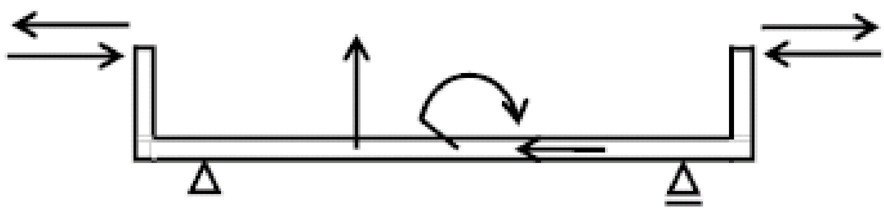
### Ексцентрично затегнути или притиснути кратки носећи елемент

Подужно напрезање са савијањем носећег елемента представља релативно једноставан случај сложеног напрезања. У пракси је врло често присутно на различитим носећим конструкцијама (кранови, дизалице, копачи, торњеви...).
Код ове врсте напрезања оптерећење не делује у тежишту попречног пресека, али се његов правац поклапа са правцем тежишне линије носача.

**Подужно напрезање носећег елемент** је изазвано деловањем механичког оптерећења дуж његове тежишне линије.
Ово напрезање у попречном пресеку изазива нормални напон. Усвајамо да је тај напон равномерно распоређен по целој површини попречног пресека. Дејство притискујуће подужне силе разматраће се само за кратке носеће елементе. Уколико је носећи елемент дугачак и на њега делује притискујућа сила, целокупну анализу неопходно је проширити и на извијање носача.

**Савијање носећег елемента** изазива деловање момената савијања и/или попречних оптерећења у једној или обе главне равни (косо савијање). Момент савијања изазива само нормални напон у попречном пресеку носећег елемента, док попречно оптерећење (концентрисано, континуално) изазива и нормални напон и напон смицања. Расподела ових напона је изведена у претходном семестру (чисто савијање и савијање силама).

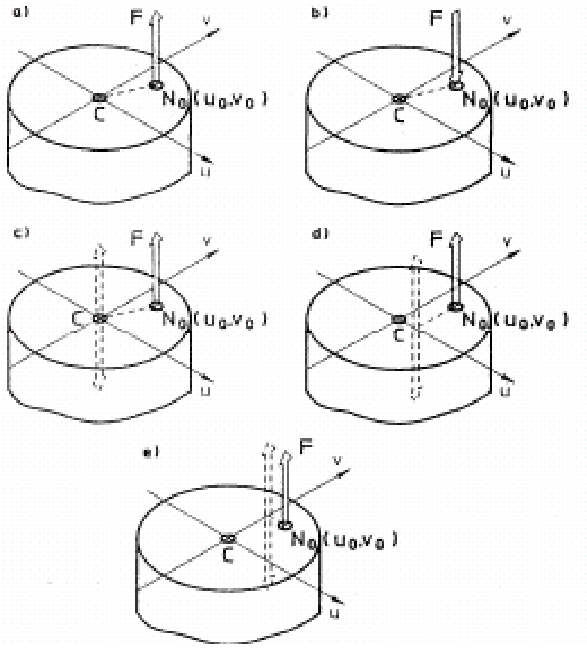
На слици 10.7 приказан је један пример овог сложеног напрезања.



*Слика 10.7. Један пример сложеног напрезања*

Да бисмо одредили расподелу нормалних напона у попречном пресеку ексцентрично притиснутог или затегнутог елемента, неопходно је да силу која делује ван тежишта (али у правцу подужне осе елемента) редукујемо на тежиште попречног пресека. Нападну тачку силе обележимо са $N_0$ и уведимо главни координатни систем (u,v). Координате нападне тачке силе обележимо са $u_0$ и $v_0$.

Редуковање ексцентричног затежућег или притискујућег оптерећења приказано је на слици 10.8 на примеру произвољног попречног пресека са тежиштем у тачки C.




*Слика 10.8. Редуковање ексцентричне силе на тежиште*

Редуковањем силе F на тежиште попречног пресека добијамо једну подужну силу у тежишту и један спрег који изазива савијање у једној или две (косо савијање) главне тежишне равни. Спрег (момент) може да се разложи на две компоненте које изазивају савијање око главних тежишних оса (u,v):

- Момент око главне осе 1 односно u

$$M_u = \pm F \cdot v_o,$$

- Момент око главне осе 2 односно v

$$M_v = \pm F \cdot u_o.$$

### Нормални напон

Све компоненте нормалних напона у овом случају су колинеарне (нормални напон увек делује управно на попречни пресек, само је интензитет различит у појединим тачкама) и могу се алгебарски сабрати.

Укупан нормални напон се састоји из три члана:

- Напон од подужне силе у тежишту,
- Напон од савијања око главне осе 1 и
- Напон од савијања око главне осе 2.

Да би израчунали интензитет напона прво морамо да одредимо главне тежишне моменте инерције $I_u$, $I_v$ и одговарајуће полупречнике елипсе инерције $i_u$, $i_v$. Израз за напон тада има следећи облик

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \pm \frac{Fv_0}{I_u} \cdot v \pm \frac{Fu_0}{I_v} \cdot u = \pm \frac{F}{A}\left(1 + \frac{v_0}{i_u^2} \cdot v + \frac{u_0}{i_v^2} \cdot u\right), \qquad (10.9)$$

при чему су $u$ и $v$ координате тачке попречног пресека за коју израчунавамо интензитет нормалног напона.
Нормални напон је линеарна функција координата u и v.

## Неутрална линија

**Неутрална линија** је геометријско место тачака попречног пресека у којима је нормални напон једнак нули. Једначина неутралне линије (слика 10.9) добија се изједначавањем претходног израза за напон са нулом

$$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{v_0}{i_u^2} \cdot v + \frac{u_0}{i_v^2} \cdot u = 0 \qquad (10.10)$$

и гласи

$$\frac{u}{a_0} + \frac{v}{b_0} = 1. \qquad (10.11)$$

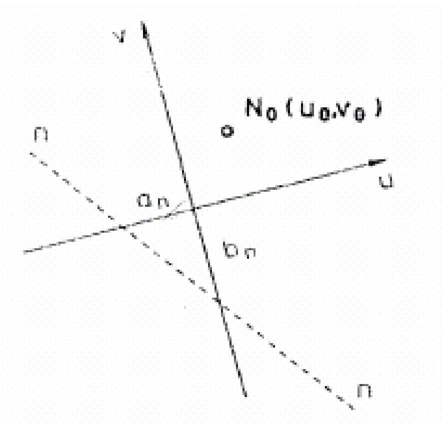
При томе су уведене следеће ознаке:

$$a_0 = -\frac{i_v^2}{u_0}, \qquad b_0 = -\frac{i_u^2}{v_0}. \qquad (10.12)$$

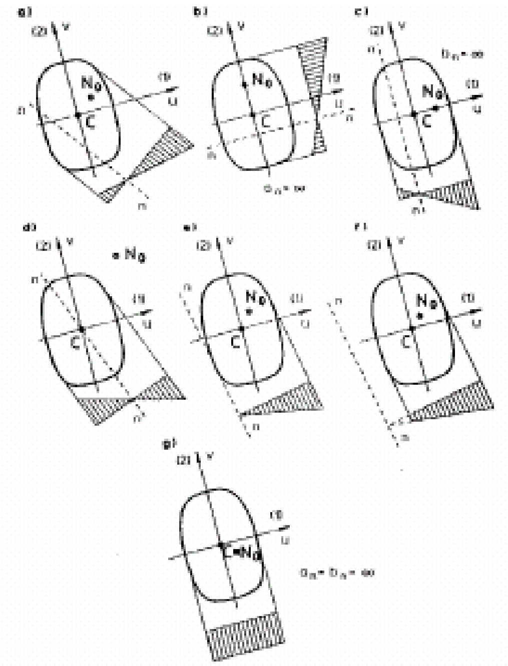
Особине неутралне линије су:

- неутрална линија дели попречни пресек на два дела, један део је оптерећен на затезање, а други на притисак,
- неутрална линија увек пролази кроз супротан квадрант од квадранта у коме је нападна тачка силе,
- неутрална линија је увек паралелна тангенти на елипсу инерције у тачки у којој је пресеца дуж која спаја нападну тачку силе $N_0$ и тежиште попречног пресека C.

Облик дијаграма нормалног напона зависи од положаја нападне тачке силе и облика попречног пресека.
Облици дијаграма нормалног напона у зависности од места дејства силе приказани су на слици 10.10.




*Слика 10.9. Положај неутралне линије*



*Слика 10.10. Могући облици дијаграма норманих напона*

У случајевима када је неутрална линија тангента на контуру попречног пресека дијаграм нормалних напона има облик троугла и цео попречни пресек је оптерећен једнозначно, што значи или само на притисак или само на затезање. Некада је неопходно пронаћи места (тачке) у попречном пресеку у којима може да делује сила, али тако да сви напони буду истог знака. Скуп таквих тачака назива се **језгро пресека**. Значи, ако је нападна тачка силе унутар језгра, пресека цео попречни пресек је једнозначно оптерећен.