Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

Rešenja zadataka sa Drugog kolokvijuma iz predmeta Matematika 3

1. Uzećemo da je kriva L data sa

$$L: \ x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ z = bt \ (0 \le t \le 2\pi),$$

za neke realne konstante a i b (u 1. grupi je $a = 2$ i $b = 3$, dok je u drugoj obrnuto). Kako je $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt$ i $dz = b\,dt$, biće

$$\int_L y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^{2\pi} -a^2\sin^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} ab\,t\cos t\,dt + \int_0^{2\pi} ab\,t\cos t\,dt$$

Pritom je

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt = \pi$$

i

$$\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt = t\,sint|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t\,dt = 0,$$

pa je konačan odgovor $-a^2\pi$.

2. Rešavamo zadatak za 2. grupu, rešenje zadatka za 1. grupu izgleda identično - samo x i y medjusobno zamene mesta. Kako se krive $x = 2$ i $y = x$ seku u tački $A(2,2)$, krive $y = x$ i $y = \frac{1}{x}$ u tački $B(1,1)$ i krive $y = \frac{1}{x}$ i $x = 2$ u tački $C(2,\frac{1}{2})$, jasno je da se cela oblast G nalazi u prvom kvadrantu i da ima izgled "krivolinijskog"trougla ABC (slika). Imamo

$$\begin{aligned} I = & \int_1^2 x^2\,dx = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^2}\,dy = \int_1^2 \left(x^2\,dx\left(-\frac{1}{y}\right)\right)\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = \int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{x}+x\right)\,dx = \int_1^2 \left(-x+x^3\right)\,dx \\ = & \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2 = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

3. U uopštenim sfernim koordinatama, $x = ar\cos\varphi\cos\theta$, $y = br\sin\varphi\cos\theta$, $z = cr\cos\theta$, unutrašnjost elipsoida data je sa $r \le 1$, dok se uslov $z \ge \frac{c}{\sqrt{2}}$ ($z \ge \frac{c}{2}$) na $r \ge \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}$ ($r \ge \frac{1}{2\cos\theta}$). Pritom, donja ne sme biti veća od donje, pa mora da važi i

$$\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta} \le 1, \ \cos\theta \ge \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \ \left(\frac{1}{2\cos\theta} \le 1, \ \cos\theta \ge \frac{1}{2}, \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right).$$

Stoga je

$$
\begin{aligned}
V = & \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}}^{1} r^2\,dr\sin\theta\right)d\theta\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}}^{1}\sin\theta\right)d\theta\right)d\varphi \\
= & \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{2}\cos^3\theta}}{3}\sin\theta\right)d\theta\right)d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\theta-\frac{\sin\theta}{2\sqrt{2}\cos^3\theta}\right)d\theta\right)d\varphi \\
= & \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin\theta\,d\theta}{2\sqrt{2}\cos^3\theta}\right)d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos\theta)}{2\sqrt{2}\cos^3\theta}\right)d\varphi \\
= & \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left((-\cos\theta)_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4\sqrt{2}\cos^2\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)d\varphi = \frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{5}{4\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

Ovo je bilo rešenje zadatka za 2. grupu, na isti način se u 1. grupi dobija rezultat $\frac{5\pi}{24}$.

Zadatak se mogao rešavati i preko polarno cilindričnih koordinata (zapravo, primena dvostrukih integrala na računanje zapremine). Na ovaj način ćemo kompletno rešiti zadatak iz 1. grupe (za 2. je potpuno analogno).

Uvrštavanjem $z=\frac{c}{2}$ u jednačinu elipsoida dobijamo da ga data ravan seče po krivoj L datoj sa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{3}{4},\ z=\frac{c}{2},$$

te da se telo čiju zapreminu treba izračunati odozgo ograničeno ravni $z_1(x,y)=0$ koji se projektuje u oblast

$$G=\left\{\ (x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{3}{4}\right\},$$

a odozdo delom površi $z_2(x,y)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ koji se projektuje u G, pa je

$$
\begin{aligned}
V & = \int\int_G\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-\frac{1}{2}c\right)dx\,dy = \int\int_{G'}c\left(\sqrt{1-\rho^2}-\frac{1}{2}\right)\cdot ab\rho\,d\rho\,d\varphi \\
& = abc\int\int_{G'}\left(\sqrt{1-\rho^2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi,
\end{aligned}
$$

gde smo uveli $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$ i

$$G'=\{\ (\rho,\varphi)\mid 0\le\rho\le\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\le\varphi\le 2\pi\}.$$

Zato je dalje

$$
\begin{aligned}
V & = abc\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{1-\rho^2}-\frac{1}{2}\right)\rho\,d\rho\right)d\varphi = \pi abc\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)dt = \pi abc\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{t}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1} \\
& = \frac{5}{24}\pi abc
\end{aligned}
$$

4. Uzećemo da je ograničenja konusa dato sa $z\le h$ (grupe su se samo po tome razlikovale).

Kako je $z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, to je $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pri čemu spoljna strana date konusne površi očito predstavlja njenu donju stranu (ostatak rešenja se odnosi na spoljnu stranu, rešenje koje se odnosi na unutrašnju je isto s tim što bi se svi izrazi javili sa suprotnim znakom), zapisujemo je u obliku $-z+\sqrt{x^2+y^2}$, pa je

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, -1 \right)$$

i onda

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_S ((y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma)\ dS \\
&= \int\int_{x^2+y^2\le h^2} \left(\frac{\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\cdot y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - (x-y) \right)\ dx\,dy \\
&= \int\int_{x^2+y^2\le h^2} \left(\frac{(y-x)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - (x-y) \right)\ dx\,dy = 2\int\int_{x^2+y^2\le h^2} (x-y)\ dx\,dy \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho(\rho\sin\varphi - \rho\cos\varphi)\,d\rho = 2\int_0^h \rho^2\,d\rho \int_0^{2\pi} (\sin\varphi - \cos\varphi)\ d\varphi = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Asistent: Aleksandar Pejčev