Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za matematiku

07.02.2014.

Pismeni deo ispita iz predmeta Matematika 3 u Januarskom ispitnom roku

1. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{dt} = x + y + 1 + e^t,$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x - y.$$

2. Odrediti funkciju $f(r)$ tako da divergencija vektora $\vec{v} = f(r)\vec{r}$ bude jednaka nuli. $\vec{r}$ je vektor položaja proizvoljne tačke, a r njegov intezitet.

3. Izračunati zapreminu tela odredjenog relacijama

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 \geq x, \quad \text{za} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

4. Izračunati krivolinijski integral

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

ako je C kružnica definisana jednačinama $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + z = 1$ i orijentisana u negativnom smeru posmatrano sa vrha Ox-ose.

Rešenja zadataka

1. Ako izrazimo iz prve jednačine $y = x' - x - 1 - e^t$ (x i y su funkcije argumenta t), diferenciramo ($y' = x'' - x' - e^t$) i uvrstimo u drugu jednačinu, dobijamo

$$y' = x'' - x' - e^t = 3x - (x' - x - 1 - e^t), \; x'' - 4x = 1 + 2e^t.$$

Karakteristična jednačina za odgovarajuću homogenu jednačinu $x_h'' - 4x_h = 0$ glasi $\lambda^2 - 4 = 0$ ($\lambda_{1,2} = \pm 2$), pa je njeno opšte rešenje

$$x_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

Partikularno rešenje koje odgovara funkciji $f_1(t) = 1$ tražimo u obliku $x_{p_1} = A$ ($x_{p_1}' = x_{p_1}'' = 0$), pa se $x_{p_1}'' - 4x_{p_1} = 1$ svodi na $-4A = 1$ i $A = -1/4$, tj. $x_{p_1}(t) \equiv -\frac{1}{4}$.
Partikularno rešenje koje odgovara funkciji $f_2(t) = 2e^t$ tražimo u obliku $x_{p_2} = Ae^t$ ($x_{p_1}' = x_{p_1}'' = Ae^t$), pa se $x_{p_2}'' - 4x_{p_2} = 2e^t$ svodi na $-3A = 2$ i $A = -2/3$, tj. $x_{p_2}(t) = -\frac{2}{3}e^t$. Sada dobijamo opšte rešenje

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3}e^t,$$

dok je

$$\begin{aligned} y(t) = & \; x'(t) - x(t) - 1 - e^t = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} - \tfrac{2}{3}e^t - \left(C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3}e^t\right) - 1 - e^t \\ = & \; C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t} - \tfrac{3}{4} - e^t. \end{aligned}$$

2. Važi
$$div\overrightarrow{v} = div\left(f(r)\cdot\overrightarrow{r}\right) = \nabla\left(f(r)\cdot\overrightarrow{r}\right) = f(r)\cdot\nabla\overrightarrow{r} + \overrightarrow{r}\nabla f(r).$$
Kako je $\nabla\overrightarrow{r} = 3$ i
$$\nabla f(r) = f'(r)\nabla r = f'(r)\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r},$$
dobijamo
$$div\overrightarrow{v} = f'(r)\cdot 3 + \frac{f'(r)}{r}\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{r} = 3f'(r) + \frac{f'(r)}{r}\cdot r^2 = 3f'(r) + rf(r),$$
pa se uslov zadatka svodi na jednačinu $3f(r) + rf'(r) = 0$, odnosno
$$\frac{f'}{f} = -\frac{3}{r},\ \ln|f| = -3\ln r + C = \ln\left(C_1\frac{1}{r^3}\right),\ f(r) = \frac{C_1}{r^3}.$$
Konačno, $\overline{v} = \dfrac{C_1}{r^3}\overrightarrow{r}$.

3. To telo je odozdo ograničeno oblašću $G = \{\ (x,y) \mid x^2+y^2 \geq x\}$ ravni $z_1(x,y) = 0$, a odozgo delom sfere $x^2+y^2+z^2 = 1$ (dakle $z_2(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$) koji se projektuje u oblast G. Dakle,
$$V = \int\int_G \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\int_{G'} \sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho d\varphi,$$
gde se G' transformacijom $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ slika u oblast G (logično je uvesti polarne koordinate jer se u podintegralnoj funkciji javlja x^2+y^2). Očito je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ jer se G nalazi u I kvadrantu, dok je $G' = \{\ (\rho,\varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ \cos\varphi \leq \rho \leq 1\}$, pa je
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^1 \sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^1 \sqrt{1-\rho^2}\cdot\frac{1}{2}d\left(1-\rho^2\right)) \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\sin\varphi}^0 t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_{\sin^2\varphi}^0\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^3\varphi}{\frac{3}{2}}\right) d\varphi \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3}\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{9}. \end{aligned}$$

4. Jednačina negatvno orijentisane strane ravni $x + z = 1$ glasi $F(x,y,z) = 1 - x - z = 0$, pa je
$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (-1, 0, -1)$$
i
$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Na osnovu Stoksove formule je
$$\int\int_S \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS = \int\int_S \frac{2}{\sqrt{2}}dS = \sqrt{2}\int\int_S dS.$$
Jasno je da je dati integral jednak površini kruga ograničenog kružnicom C, ali poluprečnik tog kruga nije jednostavno naći (mada nije ni preteško). Zato ćemo dati integral rešavati na klasičan način. Imamo $dS = \sqrt{2}dy\,dz$, pri čemo jednačinu oblasti ravni Oyz (moglo je i Oxy)

u koju se projektuje površ S dobijamo uvrštavanjem $x = 1 - z$ u jednačinu odgovarajuće sfere

$$(1-z)^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y^2 + 2z^2 - 2z + 1 = 1,\ y^2 + 2(z^2 - z) = 0,\ y^2 + 2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$2y^2 + 4\left(z - \frac{1}{2}\right)^2,\ \left(y\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\left(z - \frac{1}{2}\right)\right)^2 = 1,\ \left(y\sqrt{2}\right)^2 + (2z-1)^2 = 1,$$
$$\left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{z - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1.$$

Očito se radi o elipsi sa poluosama $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $b = \frac{1}{2}$. Dobijamo da je polazni integral jednak

$$\sqrt{2}\int\int_S dS = \sqrt{2}\int\int_D \sqrt{2}dy\,dz = 2\int_D dy\,dz = 2P(D) = 2\pi ab = \frac{\pi\sqrt{2}}{2},$$

gde je D unutrašnjost elipse data sa

$$\left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{z - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq 1.$$

Dakle, iskoristili smo poznati obrazac za površinu elipse, pri čemu se isti mogao lako i "izvesti"uvodjenjem prirodno nametnith polarnih koordinata

$$\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \rho\cos\varphi,\ \frac{z - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \rho\sin\varphi;\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\varphi,\ z = \frac{1}{2} + \rho\left(\frac{1}{2}\sin\varphi\right),\ 1 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

pri čemu bi odgovarajući Jakobijan iznosio $\frac{1}{2\sqrt{2}}\rho$.

Napomenimo i to da se polazni krivolinijski integral mogao rešavati i bez Stoksove formule direktnom parametrizacijom date krive

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t,\ x = 1 - z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin t,$$

pri čemu je $t \in [0, 2\pi]$.

Zadaci za 2. grupu su bili potpuno analogni.

Miodrag Spalević

Aleksandar Pejčev