

МЕТОДА ПОМЕРАЊА

Присутне методе анализе отпорности конструкција су:

- метода сила и
- метода померања

Метода сила има за непознати величину силу, док метода померања има за непознату величину померање. Применом Кастиљанових теорема непознату силу и померање у некој тачки конструкције добијамо:

$$S_i = \frac{\partial A_d}{\partial \delta_i}, \quad \delta_i = \frac{\partial A_d^*}{\partial S_i}, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n).$$

Даље, померање и силу произвољне тачке добијамо:

$$\delta_i = \sum_j \alpha_{ij} S_j, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n), \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial \delta_i}{\partial S_j} = \frac{\partial^2 A_d}{\partial S_i \partial S_j}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

$$S_i = \sum_j k_{ij} \delta_j, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n), \quad k_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial \delta_j} = \frac{\partial^2 A_d}{\partial \delta_i \partial \delta_j}, \quad k_{ij} = k_{ji}$$

Коефицијент α_{ij} је Максвелов утицајни коефицијент еластичности и он представља транслацију или ротацију тачке i услед јединичне силе S_j која делује у тачки j . Коефицијент k_{ij} је утицајни коефицијент крутости и он представља концентрисану силу или момент у тачки i услед јединичне транслације или ротације δ_j која настаје у тачки j .

Канонске једначине методе сила и померања за дефинисање допунских услова у сажетом облику гласе:

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} S_j + \Delta_i = \delta_{oi} (= 0) \quad \text{и} \quad S_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} \delta_j + S_i^q = S_{oi} (= 0)$$

Канонске једначине методе сила за решавање непознатих концентрисаних оптерећења и методе померања за решавање непознатих померања транслације и ротације гласе:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_{11} S_1 & + & \alpha_{12} S_2 & + & \dots & + & \alpha_{1n} S_n & = & \delta_1 & & k_{11} \delta_1 & + & k_{12} \delta_2 & + & \dots & + & k_{1n} \delta_n & = & S_1 \\ \alpha_{21} S_1 & + & \alpha_{22} S_2 & + & & + & \alpha_{2n} S_n & = & \delta_2 & & k_{21} \delta_1 & + & k_{22} \delta_2 & + & & + & k_{2n} \delta_n & = & S_2 \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n1} S_1 & + & \alpha_{n2} S_2 & + & & + & \alpha_{nn} S_n & = & \delta_n & & k_{n1} \delta_1 & + & k_{n2} \delta_2 & + & & + & k_{nn} \delta_n & = & S_n \end{array} \quad \text{и}$$

Канонске једначине методе сила и померања написане у матричном облику гласе:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \cdot \\ S_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \cdot \\ S_n \end{Bmatrix}, \quad [k] = [\alpha]^{-1}.$$

$[\alpha]\{S\} = \{\delta\}$ и $[k]\{\delta\} = \{S\}$, матрице $[k]$ и $[\alpha]$ се називају матрица крутости и еластичности.

Одеђивање коефицијената крутости

Свака тачка носећег елемента може бити оптерећена са три конценрисане силе у сва три правца и са три момента око одговарајућих оса. Последица тог оптерећења представља померање-деформација транслације по све три осе и ротација око све три осе. Свака сила, односно деформација везана је за одговарајуће напрезање носећег елемента.

Повезаност напрезања, деформације, оптерећења, напона, карактеристике пресека и материјала сложено оптерећеног линијског носећег елемента гласи:

- подужно напрезање – подужна деформација, подужно оптерећење, нормални напон, површина попречног пресека, модул елаастичности
- увијање – угаона деформација, момент увијања, смицајни напон, торзциони момент инерције, модул клизања
- савијање у првој (вертикалној) главној равни – попречна вертикална транслација и угаона деформација око хоризонталне осе, попречна вертикална сила и момент савијања око хоризонталне осе, нормални и смицајни напон, аксијални момент инерције, модул еластичности
- савијање у другој (хоризонталној) главној равни – попречна хоризонтална транслација и угаона деформација око вертикалне осе, попречна хоризонтална сила и момент савијања око вертикалне осе, нормални и смицајни напон, аксијални момент инерције, модул еластичности.

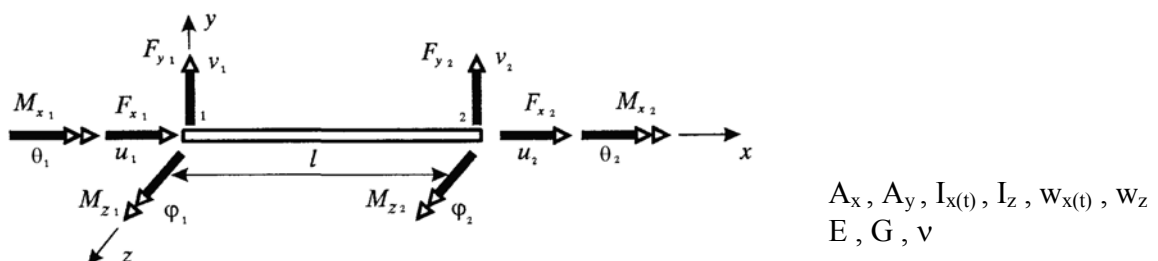
Један сегмент линијског носећег елемента описан је са:

- две крајње тежишне тачке које називамо почетна и крајња чворна тачка,
- карактеристикама попречног пресека (површине, моменти инерције и отпорни моменти),
- карактеристикама материјала (модул еластичности и клизања, поасонов коефицијент),
- могућим прихваћеним оптерећењем,
- могућим последићним деформацијама транслације и ротације.

Видимо да су карактеристике пресека, материјала, оптерећења и деформације уско везане за врсту напрезања.

У даљем раду посматрајмо линијски носећи елемент напрегнут подужно, увојно и савојно у једној главној вертикалној равни. Савијање у другој главној хоризонталној равни за сада не разматрамо.

Ознаке и величине оваквог линијског носећег елемента дате су на слици 5. Ознаке се разликују у односу на досадашње. Ове ознаке су најчешће применљиве за дефинисање крутости елемента.



Слика 5. Ознаке и величине линијског носећег елемента

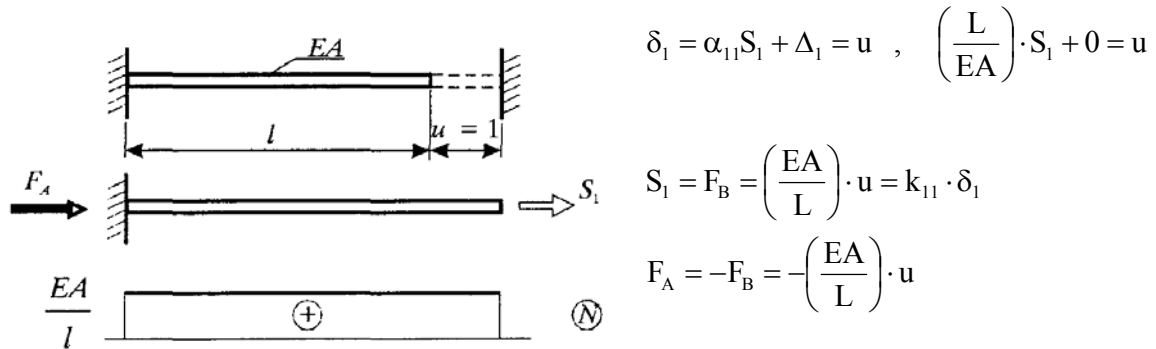
Вектор померања и оптерећења i -тог чвора носећег елемента према слици 5 гласи:

$$\delta_i = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}^T = \{u, v, \phi, \theta\}^T \quad \text{и} \quad F_i = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}^T = \{F_x, F_y, M_z, M_x\}^T$$

Коефицијент крутости подужног напрезања линијског носећег елемента

Узмимо пример једног линијског носећег елемента код кога су оба краја подужно непокретна. Овај пример је једанпут статички неодређен. Израћунајмо унутрашњу подужну силу у елементу ако десни непокретни крај померимо за померање u . Унутрашња сила за јединично померање $u=1$ представља коефицијент крутости подужног напрезања линијског носећег елемента.

На слици 6 дат је приказ израчунавања овог коефицијента крутости.

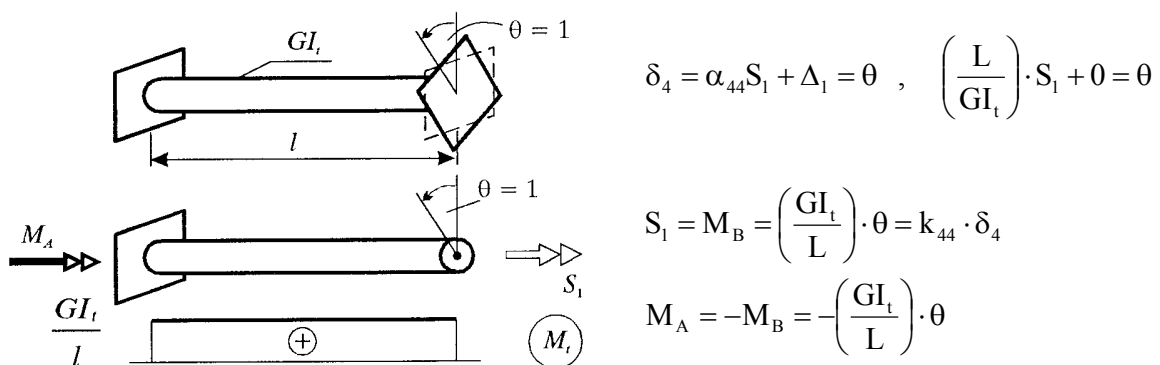


Слика 6. Коефицијент крутости подужног напрезања линијског носећег елемента

Коефицијент крутости напрезања увијања линијског носећег елемента

Овде имамо пример једног линијског носећег елемента код кога су оба краја угаоно непокретна око подужне осе. И овај пример је једанпут статички неодређен. Израћунајмо унутрашњи момент увијања у елементу ако десни непокретни крај окренемо за угао θ . Унутрашњи момент увијања за јединично померање $u_x=1$ представља коефицијент крутости увојног напрезања линијског носећег елемента.

На слици 7 дат је приказ израчунавања овог коефицијента крутости.

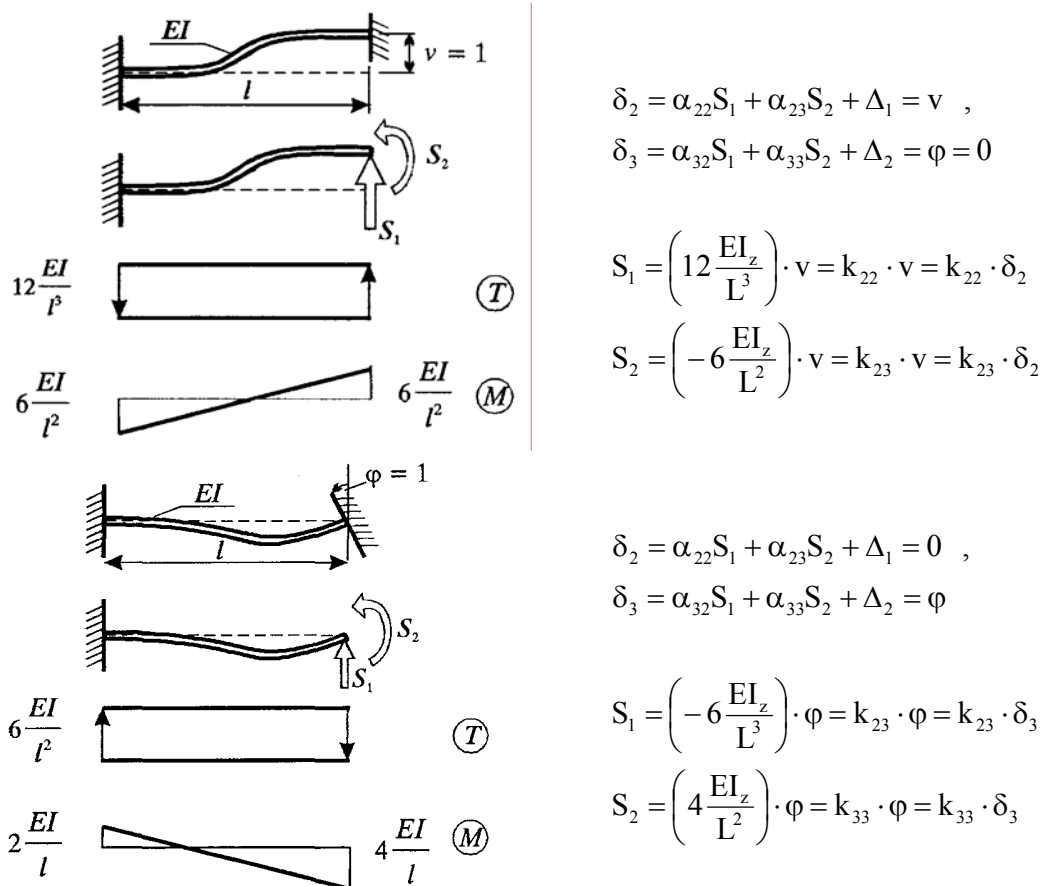


Слика 7. Коефицијент крутости напрезања увијања линијског носећег елемента

Коефицијент крутости савојног напрезања линијског носећег елемента

Узмимо један линијски носећи елемент код кога су оба краја уклештена. Посматрајмо само савијање у једног вертикалној главној тежишној равни. Овај пример је двапут статички неодређен. Израћунајмо унутрашњи момент савијања и попречну силу у елементу ако десни уклештени крај једанпут померимо за величину v а други пут заокренемо за угао φ . Унутрашњи момент савијања и попречна сила за јединична померања $v=1$ и угао $\varphi=1$ представљају коефицијенте крутости савојног напрезања линијског носећег елемента.

На слици 7 дат је приказ израчунавања ових коефицијената крутости.



Слика 7. Коефицијент крутости савојног напрезања линијског носећег елемента

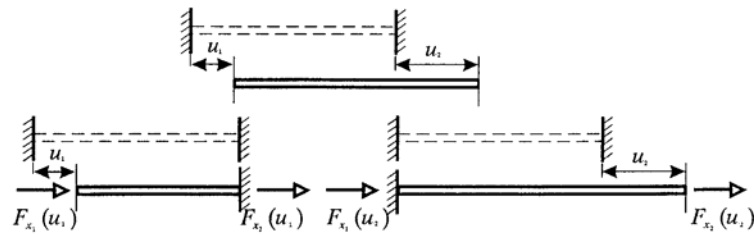
Ово је била анализа за само десни чвор. Иста анализа је и за леви чвор, односно имали би исте коефицијенте крутости. Из овога произилази познати став да колико величина једног чвора утиче на величину другог толико други чвор утиче на први. Дефинисани коефицијенти крутости омогућавају дефинисање матрице крутости носећег елемента за одговарајуће напрезање.

Матрица крутости се дефинише за свако напрезање посебно пошто у овој анализи она нису међусобно повезана. Дефинисање матрице крутости одговарајућег напрезања захтева да се разматрају оба непокретна чвора елемента и да се њима додели одговарајуће померање. Решења статички непознатих величина за јединична померања представљају чланове матрице крутости. Позиције крутости, померања и оптерећења у матрици и векторима морају бити сагласне.

Матрица крутости, вектор оптерећења и померања сложено напрегнутог носећег елемента се добија збрајањем матрица крутости, вектора оптерећења и померања елементарних напрезања водећи рачуна њиховим позицијама.

Матрица крутости, вектор померања и оптерећења подужног напрезања

Потребне величине за дефинисање матрице крутости подужног напрезања дате су на слици 8.



Слика 8. Подужно напрегнут штап

Матрица крутости, вектор непознатих померања и познатог дефинисаног оптерећења гласе:

$$[k]_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad \delta_e = \{\delta_1, \delta_2\}^T = \{u_1, u_2\}^T \quad \text{и} \quad F = \{F_1, F_2\}^T = \{F_{x1}, F_{x2}\}^T.$$

Матрица крутости има особину да је симетрична и сингуларна. Канонска једначина равнотеже на нивоу једног подужно напрегнутог коначног елемента гласи:

$$[k]_e \{\delta\}_e = \{F\}_e, \quad \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix}.$$

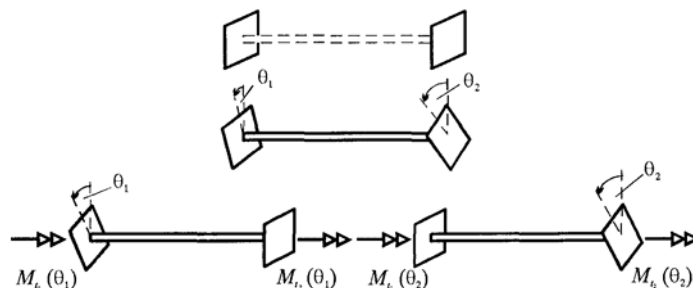
Узмимо један штап крутости EA/L са непокретним чвором на једном крају оптерећен подужном силом на другом крају. Једначина равнотеже и њено решење сада гласи:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}, \quad u_2 = \frac{FL}{EA} = \delta$$

Видимо да смо добили познати образац за деформацију подужно напрегнутог штапа.

Матрица крутости, вектор померања и оптерећења увојног напрезања

Потребне величине за дефинисање матрице крутости увојног напрезања дате су на слици 9.



Слика 9. Увијање штапа

Матрица крутости, вектор непознатих померања и познатог дефинисаног оптерећења гласе:

$$[k]_e = \frac{GI_t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad \delta_e = \{\delta_1, \delta_2\}^T = \{\theta_1, \theta_2\}^T \quad \text{и} \quad F = \{F_1, F_2\}^T = \{M_{x1}, M_{x2}\}^T.$$

Матрица крутости, и овде, има особину да је симетрична и сингуларна. Канонска једначина равнотеже на нивоу једног увојно напрегнутог коначног елемента гласи:

$$[k]_e \{\delta\}_e = \{F\}_e, \quad \frac{GI_t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{x2} \end{Bmatrix}.$$

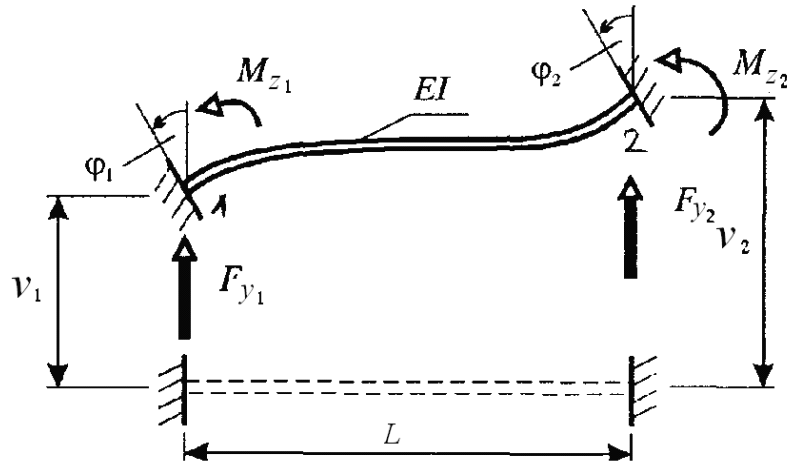
Узмимо један штап крутости GI_t/L са непокретним чвором на једном крају оптерећен моментом увијања на другом крају. Једначина равнотеже и њено решење сада гласи:

$$\frac{GI_t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_t \end{Bmatrix}, \quad \theta_2 = \frac{M_t L}{GI_t}$$

Видимо да смо добили познати образац за угао увијања штапа.

Матрица крутости, вектор померања и оптерећења савојног напрезања

Потребне величине за дефинисање матрице крутости савојног напрезања дате су на слици 10.



Слика 10. Савојно напрезање

Матрица крутости, вектор непознатих померања и познатог дефинисаног оптерећења за случај савијања у једног главној тежишној равни (вертикална) гласе:

$$[k]_e = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix}, \quad \delta_e = \{\{\delta_1\}, \{\delta_2\}\}^T = \{v_1, \phi_1, v_2, \phi_2\}^T \text{ и}$$

$$F = \{\{F_1\}, \{F_2\}\}^T = \{F_{y1}, M_{z1}, F_{y2}, M_{z2}\}^T.$$

Матрица крутости, и овде, има особину да је симетрична и сингуларна. Канонска једначина равнотеже на нивоу једног савојно напрегнутог коначног елемента гласи:

$$[k]_e \{\delta\}_e = \{F\}_e, \quad \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}.$$

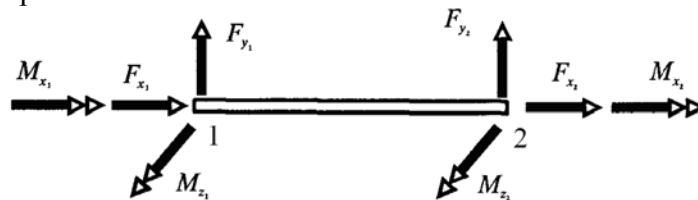
Узмимо једну конзолу крутости EI_z/L^3 са уклештеним чвором на једном крају оптерећен попречном силом на другом крају. Једначина равнотеже и њено решење сада гласи:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad v_2 = \frac{FL^3}{3EI_z}, \quad \varphi_2 = \frac{FL^2}{2EI_z}$$

Видимо да смо добили познате образце за угиб и нагиб савијене конзоле.

Матрица крутости сложеног напрезања

На основу изложеног матричну једначину равнотеже сложено напрегнутог линијског носећег коначног елемента (слика 11), матрицу крутости, вектор померања и оптерећења збрајајући једноставна напрезања. Напомињемо да утицаји између разнородних напрезања нема јер их разматрамо да су линеарна.



Слика 11. Сложено напрезање

Матрицу крутости сложеног напрезања можемо формирати на различите начине у зависности како збрајамо напрезања по два крајња чвора елемента. Највише присутан начин је да сложено напрезање описујемо по једном чвору па по другом а не у оквиру једног напрезања за оба чвора. Даље, у оквиру једног чвора његова могућа померања (степен слободе) можемо поређати на више начина (нпр. прво translације па ротације). Изглед једначина гласи:

$$[k]_e \{\delta\}_e = \{F\}_e, \quad \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & | & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & | & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & | & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & | & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & | & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & | & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & | & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & | & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ \theta_1 \\ - \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ M_{x1} \\ - \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ M_{x2} \end{Bmatrix}.$$

Матрица крутости сложеног напрезања има особину да је симетрична и сингуларна.

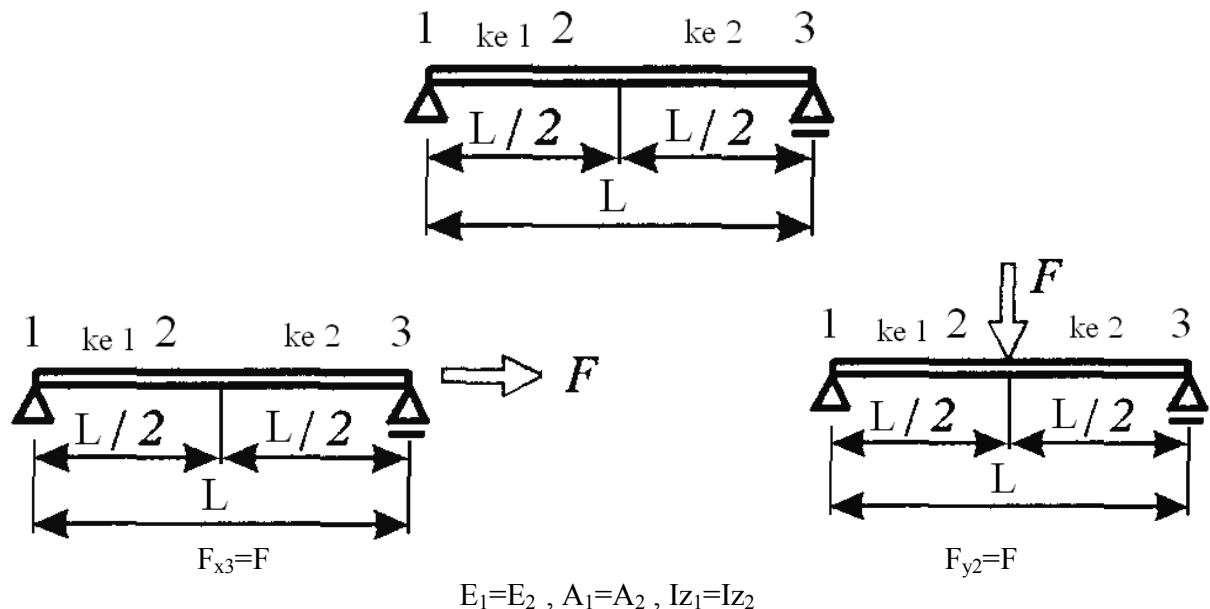
Матрица крутости сложеног напрезања два линијска коначна елемента

Једначина равнотеже, матрица крутости, вектор померања и оптерећења се јасно могу формирати и за два и више коначних елемената постављених по линији, у равни или простору. Ради лакшег описа формирања матрице крутости више коначних елемената (глобална матрица крутости) узећемо сам два коначна елемента постављених на линији.

Принцип формирања глобалне матрице крутости, вектора померања и оптерећења за модел са више коначних елемената је следећи:

- крутост једног чвора формирају сви елементи који поседују тај чвор
- крутост заједничког чвора два коначна елемента постављена по линији се алгебарски сабира по одговарајућем напрезању и степену слободе
- вектор померања чвора припада свим коначним елементима који поседују тај чвор
- вектор спољашњег оптерећења и ослонци се дефинише по степенима слободе чвора.

Узмимо пример два линијска коначна елемента (слика12) оптерећена у два случаја.



Слика 12.

Формирање једначине равнотеже, матрице крутости, вектора померања и оптерећења гласи:

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad , \quad \begin{bmatrix} [k_{11}]_{(1)} & [k_{12}]_{(1)} & 0 \\ [k_{21}]_{(1)} & [k_{22}]_{(1)} + [k_{11}]_{(2)} & [k_{12}]_{(2)} \\ 0 & [k_{21}]_{(2)} & [k_{22}]_{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \phi_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad , \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ M_{xi} \end{Bmatrix} .$$

Подужно напрезање

Напрезање увијања

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & | & 0 & -\frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & | & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & \frac{4E_1 I_{z1}}{L_1} & 0 & | & 0 & -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & \frac{2E_1 I_{z1}}{L_1} & | & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} & -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & 0 & | & 0 & \frac{12E_1 I_{z1}}{L_1^3} + \frac{12E_2 I_{z2}}{L_2^3} & -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} + \frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & | & 0 & -\frac{12E_2 I_{z2}}{L_2^3} & \frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} \\
0 & \frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} & \frac{2E_1 I_{z1}}{L_1} & 0 & | & 0 & -\frac{6E_1 I_{z1}}{L_1^2} + \frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & \frac{4E_1 I_{z1}}{L_1} + \frac{4E_2 I_{z2}}{L_2} & | & 0 & -\frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & \frac{2E_1 I_{z2}}{L_2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -\frac{12E_2 I_{z2}}{L_2^3} & -\frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & | & 0 & \frac{12E_2 I_{z2}}{L_2^3} & -\frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & \frac{2E_1 I_{z2}}{L_2} & | & 0 & -\frac{6E_2 I_{z2}}{L_2^2} & \frac{4E_2 I_{z2}}{L_2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Напрезање савијања

Решимо пример са претходне слике посебно за оба случаја оптерећења, мада смо могли то да урадимо и заједно.

Једначине и решења за подужно напрезање гласе:

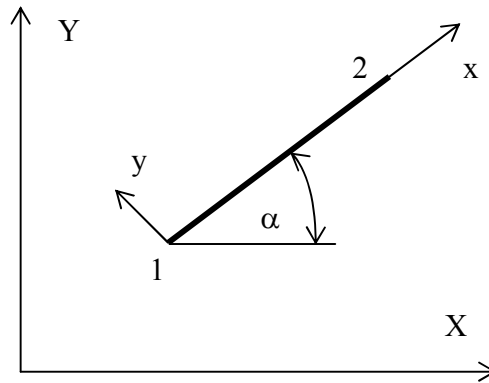
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} \frac{EA}{L} (2u_2 - u_3) &= 0 \\ \frac{EA}{L} (-u_2 + u_3) &= F \end{aligned}, \quad \begin{aligned} u_2 &= \frac{FL}{2EA} \\ u_3 &= \frac{FL}{EA} \end{aligned}$$

Једначине за савојно напрезање гласе:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & -6L & 24 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 2L^2 & 0 & 8L^2 & 0 & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ 0 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Матрица крутости линијских коначних елемента у равни

Сада је потребно је речи да је потребно да постоје два координатна система и то: локални координатни систем коначног елемента и глобални координатни система прорачуна (слика 13).



Слика 13.

Величине везане за коначни елемент (матрица крутости, вектор померања и оптерећења) се прво дефинишу за локални координатни систем. Након тога се обавља трансформација величина из локалног у глобални координатни систем, односно дефинишу се величине коначног елемента у глобалном координатном систему. Након тога следи формирање глобалне матрице крутости на већ приказан начин.

Не улазећи у дубљу анализу овде ће бити приказана само матрица трансформација у равни и потребне математичке операције те трансформације. Матрица трансформације је реда колико и матрица крутости елемента.

Трансформације гласе:

$$[K]_e = [T]^T [k]_e [T], \quad \{\Delta\}_e = [T]^T \{\delta\}_e, \quad \{\Phi\}_e = [T]^T \{F\}_e$$

При томе трансформација x-y координата гласи $\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$, односно имамо $X = x\cos\alpha + y\sin\alpha$ и $Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$.