Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

20.02.2013. godine
grupa: 1

Pismeni deo ispita iz predmeta Matematika 3 u februarskom ispitnom roku

1. Rešiti diferencijalne jednačine

   (a) $y(1-\ln(y))y'' + y'^2 \ln y = 0, \;\; y = y(x);$

   (b) $y'' - 2y' + y = e^x + e^{-x} + x^2 - x + 1 + \cos x, \;\; y = y(x).$

2. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} x' &= -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \quad x = x(t) \\ y' &= 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}, \quad y = y(t) \end{aligned}$$

3. Izračunati cirkulaciju vektora

$$\overrightarrow{A} = z\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + y\,\overrightarrow{k}$$

   duž linije L preseka površi $z = xy$ i $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ u pozitivnom smeru posmatrano sa pozitivnog dela z-ose

   (a) bez primene Stoksove formule;

   (b) primenjujući Stoksovu formulu.

4. Izračunati

$$\int\int\int_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$$

   po oblasti $T = \{(x, y, z)|\ 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ x, y, z \ge 0,\ x \ge y\}$.

Napomena:
Potpisati ovaj papir i predati ga sa rešenjem zadataka.

SREĆNO!!!

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

20.02.2013. godine
grupa: 2

Pismeni deo ispita iz predmeta Matematika 3 u februarskom ispitnom roku

1. Rešiti diferencijalne jednačine

   (a) $y(1+\ln(y))y'' + y'^2 \ln y = 0, \;\; y = y(x);$

   (b) $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x} + x^2 + x + 1 + \sin x, \;\; y = y(x).$

2. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 6y - \frac{3}{e^t - 1}, \quad x = x(t) \\ y' &= -2x - 4y + \frac{2}{e^t - 1}, \quad y = y(t) \end{aligned}$$

3. Izračunati cirkulaciju vektora

$$\overrightarrow{A} = z\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + y\,\overrightarrow{k}$$

   duž linije L preseka površi $z = xy$ i $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ u pozitivnom smeru posmatrano sa pozitivnog dela z-ose

   (a) bez primene Stoksove formule;

   (b) primenjujući Stoksovu formulu.

4. Izračunati

$$\int\int\int_T (x^2 + y^2)dx\,dy\,dz$$

   po oblasti $T = \{(x, y, z)|\; 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9, \; x, y, z \ge 0, \; x \ge y\}.$

Napomena:
Potpisati ovaj papir i predati ga sa rešenjem zadataka.

SREĆNO!!!

Rešenja zadataka

1. (a) Nakon smene $y' = z = z(y)$ (tada je $y'' = z\,z'$), data jednačina postaje

$$y(1 \pm \ln y) z\, z' + z^2 \ln y = 0,$$

odnosno

$$z \cdot [y(1 \pm \ln y) z' + z \ln y] = 0.$$

Jedna mogućnost je $z = 0$, odakle se dobija $y = c$ i provera direktno potvrdjuje da to jeste rešenje. Druga mogućnost je $y(1 \pm \ln y)z' + z \ln y = 0$, odnosno

$$\frac{dz}{z} = \frac{\ln y\, dy}{y(\ln y \pm 1)},$$

nakon čega integracijom, uvodeći za desnu stranu smenu $\ln y \pm 1 = t$, dobijamo

$$\ln z = \int \frac{(t \pm 1)\, dt}{t} = t \pm \ln t + C = \ln y \pm \ln(\ln y \pm 1) + C,$$

tj. $y' = C_1 \dfrac{y}{\ln y - 1}$ i u prvoj i $y' = C_1 y(\ln y + 1)$ u drugoj grupi.
U prvoj grupi imamo

$$\int \frac{(\ln y - 1)\, dy}{y} = \int C_1 dx,$$

odnosno $\dfrac{(\ln y - 1)^2}{2} = C_1 x + C_2$, dok u drugoj grupi imamo

$$\int \frac{dy}{y(\ln y + 1)} = \int C_1 dx,$$

odnosno $\ln(\ln y + 1) = C_1 x + C_2$.

(b) Odgovarajuće karakteristične jednačine glase $(\lambda \pm 1)^2 = 0$, pa odgovarajuća rešenja homogenih jednačina glase $y_h = (C_1 + C_2 x)e^{\pm x}$ i u obe grupe je potrebno tražiti 4 partikularna rešenja: za funkcije e^x, e^{-x}, $x^2 \pm x + 1$ i $\cos x$ (odnosno $\sin x$). Ta rešenja se traže u oblicima Ax^2e^x, Ae^{-x}, $Ax^2 + Bx + C$ i $A \sin x + B \cos x$ u prvoj, odnosno Ae^x, Ax^2e^{-x}, $Ax^2 + Bx + C$ i $A \sin x + B \cos x$ u drugoj grupi, po poznatom šablonu.

2. Rešavamo zadatak za 1. grupu, u zadatku za 2. grupu su samo zamenjena mesta promenljivim x i y. Koristimo metodu varijacije konstanti, koja postoji zasebno za jednačine i zasebno za sisteme jednačina. Rešenje koje sledi koristi prvu varijantu te metode (i druga varijanta se sprovodi analogno).

Iz prve jednačine imamo

$$y = \frac{1}{2}\left(-4x - x' + \frac{2}{e^t - 1}\right),$$

a diferenciranje nam daje

$$y' = \frac{1}{2}\left(-4x' - x'' + 2(e^t-2)^{-2}e^t\right),$$

što kad uvrstimo u drugu jednačinu sistema dobijamo:

$$x'' + x' = \frac{-2e^t}{(e^t-1)^2}$$

Kako karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine glasi $\lambda^2+\lambda = \lambda(\lambda+1) = 0$, njeno opšte rešenje je

$$x_h = C_1 + C_2 e^{-t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dakle, opšte rešenje nehomogene jednačine tražimo u obliku

$$x(t) = C_1(t) + C_2(t)e^{-t},$$

gde funkcije $C_1(t)$ i $C_2(t)$ zadovoljavaju

$$\begin{aligned} C_1'(t) + C_2'(t)e^{-t} &= 0 \\ -C_2'(t)e^{-t} &= \frac{-2e^t}{(e^t-1)^2}, \end{aligned}$$

odnosno

$$C_1'(t) = \frac{-2e^t}{(e^t-1)^2},\ C_2'(t) = \frac{2e^{2t}}{(e^t-1)^2}.$$

Integracijom nalazimo

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -2\int \frac{e^t\,dt}{(e^t-1)^2} = -\int \frac{dz}{z^2} = \frac{2}{z} + D_1 = \frac{2}{e^2-1} + D_1, \\ C_2(t) &= 2\int \frac{e^{2t}\,dt}{(e^t-1)^2} = 2\int \frac{(z-1)\,dz}{z^2} = 2\left(\ln|z| - \frac{1}{z}\right) + D_2 \\ &= 2\left(\ln|e^t-1| - \frac{1}{e^t-1}\right) + D_2 \ \ \text{(u oba slučaja se uvodi smena } z = e^t - 1). \end{aligned}$$

Sada $x(t)$ dobijamo direktno, a odmah zatim i $y(t)$.

3. (a) Parametrizujemo krivu L:

$$x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 6\sin t\cos t = 3\sin 2t,$$

$$dx = -3\sin t\,dt,\ dy = 2\cos t\,dt,\ dz = 6\cos 2t\,dt$$

nakon čega za $C = Circ(\overrightarrow{A})$ dobijamo

$$\begin{aligned} C &= \oint_L z\,dx + x\,dy + y\,dz = \int_0^{2\pi} (-9\sin 2t\sin t + 6\cos^2 t + 12\sin t\cos 2t)\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{9}{2}(\cos t - \cos 3t) + 3(1+\cos 2t) + 6(\sin 3t - \sin t)\right)\ dt = \int_0^{2\pi} 3\,dt = 6\pi, \end{aligned}$$

obzirom na poznatu činjenicu da je integral svake funkcije oblika $\cos kx$, $\sin kx$ na bilo kom intervalu čija je dužina celobrojni umnožak broja 2π - jednak 0.

(b)

$$C = \int\int_\Gamma \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \int\int_\Gamma dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy,$$

gde je Γ deo površi $z = xy$, odnosno $z - xy = 0$ ograničen krivom L. Dakle, $\overrightarrow{n} = (-y, -x, 1)$, $dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $\cos\alpha = \frac{-y}{x^2+y+1}$, $\cos\beta = \frac{-x}{x^2+y+1}$, $\cos\gamma = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ i onda

$$C = \int\int_\Gamma (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,dS = \int\int_D (-y - x + 1)\,dx\,dy,$$

gde je G unutrašnjost elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$. (zbog simetrije je jasno da se u obe grupe dobija isti rezultat).

Nakon uvodjenja polarnih koordinata $x = \rho\cos\varphi$, $\rho\sin\varphi$, dobijamo $(J = 6\rho)$

$$\begin{aligned} C &= 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - 3\rho\cos\varphi - 2\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho = 6\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\tfrac{\rho^2}{2} - \rho^3\cos\varphi - \tfrac{2\rho^3}{3}\sin\varphi\right)\Big|_0^1 \\ &= 6\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\tfrac{1}{2} - \cos\varphi - \tfrac{2}{3}\sin\varphi\right) = 6\pi \end{aligned}$$

4. Nakon uvodjenja sfernih koordinata,

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

ograničenja data u zadatku se svode na

$$r|_{r_1}^{r_2},\ \varphi|_0^{\pi/4}\ (\text{zbog } x \geq y),\ \theta|_0^{\pi/2}$$

i s obzirom na to da je $x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta$ i $J = r^2\sin\theta$, dati integral se svodi na

$$\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta \int_{r_1}^{r_2} r^4\,dr = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{r_2^5 - r_1^5}{5}.$$