Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

22.06.2013. godine

Pismeni deo ispita iz predmeta Matematika 3

1. Naći opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine trećeg reda sa konstantnim koeficijentima

$$y''' - 4y' = 8x^3.$$

Rešenje: Najlakše je uvesti smenu $z = z(x) = \frac{dy}{dx}$, nakon koje se jednačina svodi na

$$z'' - 4z = 8x^3.$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina glasi $\lambda^2 - 4 = 0$, pa je rešenje odgovarajuće homogene jednačne

$$z_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Partikulano rešenje tražimo u obliku $z_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (0 nije rešenje). Kako je $z_p'' = 6Ax + 2B$, dobijamo

$$-4Ax^3 - 4Bx^2 + (6A - 4C)x + 2B - 4D = 8x^3,$$

odnosno $A = -2,\ B = 0,\ C = -3,\ D = 0$. Imamo

$$z = z_h + z_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x$$

i konačno

$$y = \int z\, dx = \frac{1}{2} C_1 e^{2x} - \frac{1}{2} C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + C_3.$$

2. Dato je vektorsko polje

$$\vec{A} = \vec{i} + (y^3 + 2z^2 y)\vec{j} + z^3 \vec{k}.$$

a) Odrediti vektorske linije polja $\vec{A}$.

b) Odrediti divergenciju i rotor polja $\vec{A}$ u tački $(1, -1, 0)$.

Rešenje: a) Vektorske linije dobijamo rešavanjem sledećeg sistema diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y^3 + 2z^2 y} = \frac{dz}{z^3}.$$

Prvo iskoristimo jednakost $\frac{dx}{1} = \frac{dz}{z^3}$, koja predstavlja diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive. Nakon integracije lako se dobija:

$$c_1 = x + \frac{1}{2z^2}.$$

Zatim iskoristimo jednakost

$$\frac{dy}{y^3 + 2z^2 y} = \frac{dz}{z^3},$$

koja je ekvivalentna sa

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y^3 + 2z^2 y}{z^3},$$

odnosno

$$y'_z = \left(\frac{y}{z}\right)^3 + 2\left(\frac{y}{z}\right),$$

što predstavlja homogenu diferencijalnu jednačinu. Smenom $\frac{y}{z} = u$, odakle je $y'_z = u + zu'_z$, ona se svodi na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive:

$$\frac{du}{u^3 + u} = \frac{dz}{z},$$

čije je opšte rešenje

$$c_2 = \frac{z\sqrt{u^2 + 1}}{u},$$

odnosno, kada vratimo smenu:

$$c_2 = \frac{z}{y}\sqrt{y^2 + z^2}.$$

b) Divergencija vektorskog polja $\vec{A}$ u proizvoljnoj tački (x, y, z) je:

$$\mathrm{div}\vec{A}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3 + 2z^2 y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 2y^2 + 4yz + 2z^2,$$

konkretno u tački $(1, -1, 0)$:

$$\mathrm{div}\vec{A}(1, -1, 0) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 = 2.$$

Rotor vektorskog polja $\vec{A}$ u proizvoljnoj tachki (x, y, z) je:

$$\text{rot}\vec{A}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{i} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & y^3+2z^2y & z^3 \end{vmatrix} = 4zy\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = (4zy, 0, 0),$$

konkretno u tački $(1,-1,0)$:

$$\text{rot}\vec{A}(1,-1,0) = (4\cdot 0\cdot(-1), 0, 0) = (0,0,0).$$

3. Izračunati površinu onog dela paraboloida $x^2+y^2=az$ koji je izrezan cilindrom $x^2+y^2=1$ $(a>0)$.

Rešenje: Jasno je da se odgovarajući deo površi $z(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{a}$ projektuje na jedinični krug $\{G:\ x^2+y^2\le 1\}$ u xy-ravni, te je tražena površina jednaka

$$\int\int_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \int\int_G \sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}}\,dx\,dy = \int\int_G \frac{\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}}{a}\,dx\,dy.$$

Prelaskom na polarne koordinate, poslednji integral postaje

$$\frac{1}{a}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{a^2+4\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{2\pi}{a}\int_{a^2}^{a^2+4}\sqrt{t}\frac{1}{8}\,dt = \frac{\pi}{4a}\frac{t^{3/2}}{3/2}\Big|_{a^2}^{a^2+4} = \frac{\pi}{6a}\left((a^2+4)^{3/2}-a^3\right)$$

(jasno je koja je smena uvodjena prilikom računanja poslednjeg jednostrukog integrala).

4. Izračunati

$$\int\int\int_T (x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

gde je T oblast omedjena konusom $y^2=\frac{1}{2}(x^2+z^2)$, ravni $y=3$ i nalazi se u poluprostoru $y\ge 0$.

Rešenje: Oznachimo dati integral sa I. Važi

$$I = \int\int_G (x^2+z^2)\,dx\,dz\int_{\sqrt{\frac{x^2+z^2}{2}}}^3 dy = \int\int_G (x^2+z^2)\left(3-\sqrt{\frac{x^2+z^2}{2}}\right)dx\,dz,$$

gde je G oblast u kojoj je $x^2+z^2\le 3$. Ako uvedemo polarne koordinate: $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$, biće $x^2+z^2=\rho^2$, a jakobijan $J=\rho$. Dalje je:

$$I = \int\int_D \rho^2\left(3-\sqrt{\frac{\rho^2}{2}}\right)\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

gde je D oblast u kojoj je $\rho^2\le 3$, što znači da $\rho\in(0,\sqrt{3})$, $\varphi\in(0,2\pi)$. Dalje važi:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(3\rho^3 - \frac{\rho^4}{\sqrt{2}}\right) d\rho,$$

odakle se nakon kraćeg računa dobija:

$$I = 2\pi \left(\frac{27}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}\right).$$

Aleksandar Pejčev
Jelena Tomanović