Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za matematiku 28.09.2013.

Pismeni deo ispita iz predmeta Matematika 3

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu prvog reda
$$y(1 \pm \ln(y))y'' + (y')^2 \ln y = 0, \;\; y = y(x).$$

2. Izračunati cirkulaciju vektora
$$\overrightarrow{A} = z\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + y\,\overrightarrow{k}$$
duž linije L preseka površi $z = xy$ i $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ u pozitivnom smeru posmatrano sa pozitivnog dela z-ose.

3. Izračunati površinski integral druge vrste
$$\int\!\!\int_{S^+} x(y-1)z\,dy\,dz + xy\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$
gde S^+ označava onu stranu površi S ograničene cilindrom $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$ izmedju ravni $z = 0$ i $z = 2$ koja se vidi pri posmatranju iz koordinatnog početka.

4. Izračunati
$$\int\!\!\int\!\!\int_T (x^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$$
gde je T oblast omedjena konusom $y^2 = \frac{1}{2}(x^2 + z^2)$, ravni $y = a$ $(a > 0)$ i nalazi se u poluprostoru $y \geq 0$.

Rešenja zadataka

1. Nakon smene $y' = z = z(y)$ (tada je $y'' = z\,z'$), data jednačina postaje
$$y(1 \pm \ln y)z\,z' + z^2 \ln y = 0,$$
odnosno
$$z \cdot [y(1 \pm \ln y)z' + z \ln y] = 0.$$
Jedna mogućnost je $z = 0$, odakle se dobija $y = c$ i provera direktno potvrdjuje da to jeste rešenje. Druga mogućnost je $y(1 \pm \ln y)z' + z \ln y = 0$, odnosno
$$\frac{dz}{z} = \frac{\ln y\,dy}{y(\ln y \pm 1)},$$
nakon čega integracijom, uvodeći za desnu stranu smenu $\ln y \pm 1 = t$, dobijamo
$$\ln z = \int \frac{(t \pm 1)\,dt}{t} = t \pm \ln t + C = \ln y \pm \ln(\ln y \pm 1) + C,$$

tj. $y' = C_1 \dfrac{y}{\ln y - 1}$ i u prvoj i $y' = C_1 y(\ln y + 1)$ u drugoj grupi.

U prvoj grupi imamo

$$\int \frac{(\ln y - 1)\,dy}{y} = \int C_1 dx,$$

odnosno $\dfrac{(\ln y - 1)^2}{2} = C_1 x + C_2$, dok u drugoj grupi imamo

$$\int \frac{dy}{y(\ln y + 1)} = \int C_1 dx,$$

odnosno $\ln(\ln y + 1) = C_1 x + C_2$.

2. Parametrizujemo krivu L:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = ab\sin t\cos t = \frac{1}{2}ab\sin 2t,$$
$$dx = -a\sin t\,dt,\ dy = b\cos t\,dt,\ dz = ab\cos 2t\,dt$$

nakon čega za $C = Circ(\overrightarrow{A})$ dobijamo

$$\begin{aligned} C &= \oint_L z\,dx + x\,dy + y\,dz = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a^2 b}{2}\sin 2t\sin t + ab\cos^2 t + ab^2\sin t\cos 2t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a^2 b}{4}(\cos t - \cos 3t) + \frac{ab}{2}(1 + \cos 2t) + \frac{ab^2}{2}(\sin 3t - \sin t)\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2}\,dt = ab\pi, \end{aligned}$$

s obzirom na poznatu činjenicu da je integral svake funkcije oblika $\cos kx$, $\sin kx$ na bilo kom intervalu čija je dužina celobrojni umnožak broja 2π - jednak 0.

3. Dati integral najjednostavnije svodimo na dvojni ako projektujemo na Ozx ravan. Tada je projekcija pravougaonik $D = \{(z, x)\ \ -1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 2\}$. Primetimo da je jednačina date površi i data u obliku $y(z, x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ (jedino što ne zavisi od z). Kako je $\dfrac{\partial y}{\partial z} = 0$ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, to je

$$dS = \sqrt{1 + 0^2 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\,dz\,dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\,dz\,dx = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dz\,dx$$

Kako jedinične normale koje odredjuju izabranu stranu površi zaklapaju oštre uglove sa osom Oy, to je

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\int_D \left(x(1 + \sqrt{1 - x^2} - 1)z \cdot \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + x\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) + z \cdot 0\right) dz\,dx \\ &= \int\int_D \left(x^2 z + x + x\sqrt{1 - x^2}\right) dz\,dx = \int_{-1}^{1} dx \int_0^2 \left(x^2 z + x + x\sqrt{1 - x^2}\right) dz \\ &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 \int_0^2 z\,dz + x\int_0^2 dz + x\sqrt{1 - x^2}\int_0^2 dz\right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(2x^2 + 2x + 2x\sqrt{1 - x^2}\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + x^2\right)|_{-1}^{1} + \int_{1-}^{1} 2x\sqrt{1 - x^2} = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Primetimo da se za integral $\int_{1-}^{1} 2x\sqrt{1 - x^2}$ odmah zaključuje da je jednak nuli kao integral neparne funkcije na intervalu simetričnom u odnosu na koordinatni početak (ista površina se prvo pojavi sa znakom minus, a onda sa znakom plus), mada se i njegov neodredjeni integral lako rešava smenom $1 - x^2 = t$.

4. Označimo dati integral sa I. Važi

$$I = \int\int_G (x^2 + z^2)\, dx\, dz \int_{\sqrt{\frac{x^2+z^2}{2}}}^{a} dy = \int\int_G (x^2 + z^2) \left(a - \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{2}} \right) dx\, dz,$$

gde je G oblast u kojoj je $\sqrt{\frac{x^2+z^2}{2}} \leq a$, odnosno $x^2 + z^2 \leq 2a^2$. Ako uvedemo polarne koordinate: $x = \rho \cos\varphi$, $z = \rho \sin\varphi$, biće $x^2 + z^2 = \rho^2$, a jakobijan $J = \rho$. Dalje je:

$$I = \int\int_D \rho^2 \left(a - \sqrt{\frac{\rho^2}{2}} \right) \rho\, d\rho\, d\varphi,$$

gde je D oblast u kojoj je $\rho^2 \leq 2a^2$, što znači da $\rho \in (0, a\sqrt{2})$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Dalje važi:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(a\rho^3 - \frac{\rho^4}{\sqrt{2}} \right) d\rho,$$

odakle se nakon kraćeg računa dobija $I = \dfrac{\pi a^5}{10}$.

Aleksandar Pejčev