1. Rešenja zadataka pošaljite na email adresu:

   numericke.metode.metode@gmail.com

   do 23:59 časova 07.02.2017. godine. Rešenja zadataka pristigla sa zakašnjenjem neće biti uzimana u razmatranje, bez obzira na izgovor.

2. Prilikom slanja email-a u polju subject navedite sledeću nisku znakova:

   KMA.NM.999/GG

   gde je:

   - KMA-oznaka Katedre za Matematiku
   - NM-oznaka za Numeričke metode
   - 999/GG-broj indeksa studenta gde se unosi vodeća nula

   Na primer, ako Vam je broj indeksa 23 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

   KMA.NM.023/11

   Slično, ako Vam je broj indeksa 124 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

   KMA.NM.124/11

3. Rešenje zadataka: program u Matlabu, slike kao ilustracije u JPEG formatu, tekst otkucan u Wordu, pa eksportovan u pdf, ili skenirana rešenja pisana na papiru, pošaljite kao attachment Vašeg email-a, tako što sve fileove vezane za jedan zadatak zapakujete u zip arhive sa imenima

   zadatak01.zip, zadatak02.zip, zadatak03.zip, zadatak04.zip

4. Poslednji pristigli Vaš email je važeći i on će biti pregledan, dakle, mora sadržati rešenja svih zadataka koja želite da pošaljete.

5. Svako prepisivanje biće sankcionisano, pored toga, morate usmeno odbraniti rad koji ste poslali.

6. Rešenje svakog zadatka donosi 25%.

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet

06.02.2017.

Pismeni isit iz Numeričkih metoda

1. Neka je funkcija f u okolini tačke 0, odredjena potencijalnim redom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} x^k.$$

a) Odrediti poluprečnik konvergencije potencijalnog reda i sumirati potencijalni red.

b) Na osnovu razvoja funkcije f u potencijalni red napisati program koji izračunava vrednost funkcije f u tački x.

c) Na osnovu programa, napisanog u delu b), izračunati vrednost funkcije f u tački $x = -50.1$ (vrednost mora biti realan broj) i odrediti broj značajnih cifara u rezultatu, koristeći izraz za sumu potencijanig reda.

d) Objasniti rezultat dobijen u delu po c).

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako oderedite poluprečnik konvergenije potencijalnog reda, pronadjete analitički izraz za funkciju f pod a), napišete program koji sumira red i tako izračunava vrednost funkcije f b), izračunate broj značajnih cifara u rezultatu dobijeno sumacijom reda c), i objasnite razlog za dobijeni broj značjanih cifara d).

2. Odredjujemo broj značajnih cifara kojim je odredjena vrednost funkcije $f(x, y) = \sin(2\pi xy)$ nad oblašću $[0, 1] \times [0, 1]$ pod pretpostavkom da su veličine x i y zadate sa 3 značajnih cifara, redom.

a) Odrediti teorijski broj značajnih cifara vrednosti funkcije `f` u funkciji broja značajnih cifara argumenata funkcije.

b) Napisati `script` u `Matlabu` i prikazati grafičku zavisnost broja značajnih cifara funkcije `f` u funkciji vrednosti argumenata nad oblašću $[0, 1] \times [0, 1]$, sa barem 1000 tačaka u gridu po svakoj promenljivoj. Potrebno je nacrtati dve slike jednu koja se dobija eksperimentom i drugu koja je dobijena na osnovu teorijske ocene u delu zadatka pod a).

c) Objasniti zašto je u pojedinim delovima skupa $[0, 1] \times [0, 1]$ vrednost funkcije f odredjena sa više značjanih cifara u odnosu na druge delove. Identiikovati deo skupa $[0, 1] \times [0, 1]$ gde je vrednost f odredjena sa najmanje značajnih cifara.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite teorijko razmatranje a), `script` file i slike pod b), komentar pod c).

3. Posmatrajmo sistem linearnih jednačina $Ax = b$, gde je

```
A=-diag(ones(6,1),-4)-diag(ones(9,1),-1)+diag(4*ones(10,1))...
-diag(ones(6,1),4)-diag(ones(9,1),1)
```

i

$$b = [2111001112]^T$$

a) Koristeći funkciju `linsolve` rešiti sistem linearnih jednačina.

b) Napisati funkciju koja u `Matlabu` rešava zadati sistem koristeći Jacobijevu metodu. Odrediti broj iteracija potreban za dostizanje barem 15 značajnih cifara u rešenju.

b) Napisati funkciju koja u `Matlabu` rešava pomenuti sistem linearnih jednačina koristeći iterativni metod

$$x^{k+1} = Bx^k + \beta, \quad B = -(D + 2L)^{-1}(-L + U), \quad \beta = (D + \omega L)^{-1}b,$$

gde je `D=diag(diag(A))`, `L=tril(A,-1)`, `U=triu(A,1)`. Pokazati da iterativni proces konvergira ka rešenju sistema $Ax = b$. Odrediti broj iteracija potreban za odredjivanje rešenja sistema linearnih jednačina sa barem 15 značajnih cifara.

d) Objasniti razliku u broju iteracija potrevnom pod b) i c).

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite `script` file pod a), priložite `script` file pod b) i potreban broj iteracija, priložite `script` file i potreban broj iteracija pod c), objasnite zašto je u jednom slučaju potrebno više iteracija nego u drugom pod d).

4. Pretpostavimo da rešavamo Cauchyev problem

$$y' = -30y, \quad y(0) = 1.$$

a) Rešiti egzaktno Cauchyev problem.

b) Napisati funkciju u `Matlabu` koja rešava Cauchyev problem koristeći Adams Moultonovu metodu

$$y_{n+2} - y_n = h\left(\frac{5}{12}f_{n+2} + \frac{2}{3}f_{n+1} - \frac{1}{12}f_n\right).$$

Potrebnu startnu vrednost y_1 izračunati koristeći egzaktno rešenje dobijeno u delu pod a). Rešiti Cauchyev problem, sa $h = .001$ i nacrtati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije y na intervalu $[0, 10]$. Objasniti oblik krive.

c) Za $h_i = 2^{-i}$, $i = 5, \ldots, 10$, nacrati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije y. Na osnovu slike odrediti koje vrednosti koraka h_i imaju veliki gubitak značajnih cifara sa porastom x, a za koje vrednosti koraka h_i je taj gubitak znatno manji. Objasniti pojavu pojmom stabilnosti metoda.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite rešenje Cauchyevog problema pod a), napisanu funkciju i nacrtanu sliku pod b) uz objašnjenje slike, sliku i objašnjenje ponašanja metoda za različite vrednosti koraka pod c).

prof. dr Aleksandar Cvetković