Математика 3 - писмени испит

февруарски рок - 13.2.2017. група 1

1. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(x-1)y''-2xy'+4y=x-1$. Да ли је $y=8^{\lambda x}$ решење одговарајуће хомогене једначине за неко λ?
2. Дато је векторско поље $\vec{A}=x\vec{i}+2z\vec{j}+(x+2y)\vec{k}$. Наћи дивергенцију и ротор поља $\vec{A}$ у тачки $A(1,0,3)$. Одредити векторску линију која пролази кроз тачку A.
3. Израчунати запремину тела одређеног површима $z=x^2+y^2-4x$ и $z=4y-3x^2$.
4. Израчунати интеграл $\iint_S \sqrt{1-z^2}\,dS$, где је S површ $z=\sin(x+y)$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$.

Математика 3 - писмени испит

февруарски рок - 13.2.2017. група 2

1. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(x-1)y''-2xy'+4y=1-x$. Да ли је $y=4^{\lambda x}$ решење одговарајуће хомогене једначине за неко λ?
2. Дато је векторско поље $\vec{A}=2z\vec{i}+y\vec{j}+(y+2x)\vec{k}$. Наћи дивергенцију и ротор поља $\vec{A}$ у тачки $A(0,1,3)$. Одредити векторску линију која пролази кроз тачку A.
3. Израчунати запремину тела одређеног површима $z=x^2+3y^2-4y$ и $z=4x-y^2$.
4. Израчунати интеграл $\iint_S \sqrt{1-z^2}\,dS$, где је S површ $z=\cos(x+y)$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$.

Кратка решења

не тврдим да су безгрешна

1. *Група А.* Да проверимо да ли је $y_1=8^{\lambda x}$ хомогено решење: имамо $y_1=e^{\mu x}$, где је $\mu=\lambda\ln 8$, и тада је $y_1'=\mu e^{\mu x}$, $y_1''=\mu^2e^{\mu x}$ и $(x-1)y_1''-2xy_1'+4y_1=[\mu^2(x-1)-2\mu x+4]e^{\mu x}=[(\mu^2-2\mu)x-(\mu^2-4)]e^{\mu x}$, а то је нула само када је $\mu^2-2\mu=\mu^2-4=0$, тј. за $\mu=2$; тада је $\lambda=2/\ln 8$ и $y_1=e^{2x}$.

   Сада Лиувилова формула даје друго хомогено решење: $y_2=2x^2-2x+1$. Партикуларно решење тражимо у облику линеарног полинома и налазимо $y_p=\frac{2x-1}{4}$.

   Опште решење је $y=\frac{2x-1}{4}+C_1e^{2x}+C_2(2x^2-2x+1)$.

   Група Б. Практично исто, $y=-\frac{2x-1}{4}+C_1e^{2x}+C_2(2x^2-2x+1)$.

   Напомена. Ево шта сам редовно виђао. Људи третирају ову диференцијалну једначину као једначину са константним коефицијентима: "па супер, карактеристични полином је $(x-1)\lambda^2-2x\lambda+4$, нуле су му $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=\frac{2}{x-1}$, и хомогена решења су нам $y_1=e^{2x}$ и $y_2=e^{\frac{2x}{x-1}}$." Ово наравно није тачно. Немојте то више никад да радите. *Карактеристични полиноми имају смисла само ако су коефицијенти константни!*

2. *Група Б.* Имамо $\mathrm{div}\vec{A}=1$, $\mathrm{rot}\vec{A}=(1,0,0)=\vec{i}$; оба су константна.

   Векторске линије: ако је $\frac{dx}{2z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{y+2x}$, онда је $\frac{dy}{y}=\frac{dx+dy+dz}{2z+y+(y+2x)}=\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}$, и интеграцијом $\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+y+z)$. Одавде је $C_1=\frac{x+y+z}{y^2}$, тј. $z=C_1y^2-x-y$. Вратимо то у полазни систем: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{2z}=\frac{dx}{2(C_1y^2-x-y)}$, тј. $\frac{dx}{dy}=\frac{2(C_1y^2-x-y)}{y}=2C_1y-2-\frac{2x}{y}$, што је линеарна диференцијална једначина по x као функцији по y: $x'+\frac{2}{y}x=2C_1y-2$. Решење је $x=\frac{C_2}{y^2}+\frac{1}{2}C_1y^2-\frac{2}{3}y$.

   Група А. $\mathrm{div}\vec{A}=1$, $\mathrm{rot}\vec{A}=(0,-1,0)=-\vec{j}$, $z=C_1x^2-y-x$, $y=\frac{C_2}{x^2}+\frac{1}{2}C_1x^2-\frac{2}{3}x$.

   Напомена. Треба запамтити да је дивергенција *број*, а ротор *вектор*: дакле, *није* $\mathrm{rot}\vec{A}=(1,0,0)=1$.

   Ово сам често виђао: из $\frac{dx}{2z}=\frac{dz}{y+2x}$ људи добију $(y+2x)dx=2zdz$, и онда кажу "интеграцијом добијамо $yx+x^2=z^2+\mathrm{const}$". Ово наравно не може, јер је *y функција* по x, а *не* константа, и не знате какав јој је интеграл. Увек имајте у виду да су x, y и z међусобно зависне промењљиве, дакле оне су функције једна по другој.

3. *Група Б.* Ове две површи се секу по елипси $x^2+3y^2-4y=4x-y^2$, тј. након допуњавања квадрата $(x-2)^2+(2y-1)^2=5$. У поларним координатама: $x=r\cos\varphi+2$, $y=\frac{1}{2}r\sin\varphi+\frac{1}{2}$, где $0\leqslant r\leqslant\sqrt{5}$ и $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Јакобијан је $J=\frac{1}{2}r$ и $z_1-z_2=(4x-y^2)-(x^2+3y^2-4y)=5-r^2$, тако да је запремина $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{5}}(5-r^2)\frac{1}{2}r dr=\frac{25\pi}{4}$.

   Група А. Практично исто, исти резултат.

   Напомена. Честа грешка је била брзоплето закључивање да је јакобијан $J=r$, јер "ово су, побогу, поларне координате". Не. Ово су *уопштене поларне координате* $x=Ar\cos\varphi+\text{const}$ и $y=Br\cos\varphi+\text{const}$, а јакобијан је тада $J=ABr$.

   Такође често виђам да људи по аутоматизму стављају $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ и онда добијају гломазне изразе (још чешће, не добијају ништа). Ако ћете свеједно овако увести поларне координате, за чије сте бабе здравље допуњавали квадрате?

4. *Група А.* Имамо $\sqrt{1-z^2}=|\cos(x+y)|$ и $dS=\sqrt{1+2\cos^2(x+y)}=\sqrt{3-2\sin^2(x+y)}$, па је тражени интергал $I=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{2\pi}\sqrt{3-2\sin^2(x+y)}|\cos(x+y)|dy$. Сменом $t=x+y$ овај интеграл постаје $I=\int_0^{2\pi}dx\int_x^{x+2\pi}\sqrt{3-2\sin^2 t}|\cos t|dt=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{2\pi}\sqrt{3-2\sin^2 t}|\cos t|dt$ (због периодичности синуса и косинуса), што је даље због симетрије једнако $I=4\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\pi/2}\sqrt{3-2\sin^2 t}\cos t\,dt=8\pi\int_0^1\sqrt{3-2u^2}du$, где је $u=\sin t$. Овај интеграл се стандардно рачуна и добија се $I=6\sqrt{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

   Група Б. Уместо синуса је косинус и обрнуто, све остало је исто.