Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za matematiku

Rešenja zadataka sa pismenog ispita iz Matematike 3
Oktobar 2014.

1. (Grupa 1) Data jednačina je nehomogena linearna diferencijalna jednačina trećeg reda. Odgovarajuća homogena jednačina glasi

$$y''' + 2y'' = 0.$$

Karakteristična jednačina

$$r^3 + 2r^2 = 0$$

ima jedno dvostruko rešenje $r_1 = r_2 = 0$ i jedno jednostruko rešenje $r_3 = -2$, pa fundamentalni sistem rešenja homogene jednačine čine funkcije $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^{-2x}$, odakle dobijamo opšte rešenje homogene jednačine

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x}.$$

Partikularno rešenje polazne nehomogene jednačine tražimo metodom neodredjenih koeficijenata. Prvo tražimo partikularno rešenje jednačine

$$y''' + 2y'' = x^2 + x + 1. \tag{1}$$

Kako se desna strana jednačine (1) može napisati u obliku

$$x^2 + x + 1 = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$$

za $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_m(x) = x^2 + x + 1$, $Q_l(x) = 0$, i kako je $\alpha + \beta i = 0$ dvostruki koren karakteristične jednačine, to partikularno rešenje jednačine (1) tražimo u obliku

$$y_{p_1} = x^s e^{\alpha x}(R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x),$$

gde je $s = 2$ i $k = \max\{m, l\} = 2$. Na osnovu prethodnog sledi

$$y_{p_1} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$

gde su A, B i C nepoznate vrednosti koje treba odrediti. Lako dobijamo

$$y'_{p_1} = 4Ax^3+3Bx^2+2Cx, \quad y''_{p_1} = 12Ax^2+6Bx+2C, \quad y'''_{p_1} = 24Ax+6B,$$

a nakon uvrštavanja y''_{p_1} i y'''_{p_1} u (1) dobijamo sistem linearnih jednačina

$$24A = 1, \quad 24A + 12B = 1, \quad 6B + 4C = 1,$$

čije je rešenje

$$A = \frac{1}{24}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{4},$$

pa je

$$y_{p_1} = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^2.$$

Potpuno analogno tražimo partikularno rešenje jednačine

$$y''' + 2y'' = e^{-2x}$$

i dobijamo

$$y_{p_2} = \frac{1}{4}xe^{-2x}.$$

Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2},$$

odnosno

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}xe^{-2x}.$$

(Grupa 2) Analognim postupkom kao za grupu 1 dobijamo

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{3x} - \frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{54}x^3 - \frac{4}{27}x^2 + \frac{1}{9}xe^{3x}.$$

2. (Grupa 1) Važi

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_C (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy = \left\{ \begin{array}{c} \text{Grinova} \\ \text{formula} \end{array} \right\} \\
&= \iint_G \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y)^2 - \frac{\partial}{\partial y}(x-y)^2 \right) dxdy \\
&= \iint_G (2(x+y) + 2(x-y))\, dxdy = 4 \iint_G x dxdy,
\end{aligned}
$$

gde je G oblast omedjena trouglom C. Kako je $x = y$ jednačina prave kroz tačke B i O, a $x = -\dfrac{y}{2} + 3$ jednačina prave kroz tačke A i B, to su granice $y|_0^2$, $x|_y^{-\frac{y}{2}+3}$, pa je

$$
\begin{aligned}
I &= 4 \int_0^2 dx \int_y^{-\frac{y}{2}+3} x dy = 2 \int_0^2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_y^{-\frac{y}{2}+3} dx \\
&= 2 \int_0^2 \left(\left(-\frac{y}{2} + 3 \right)^2 - y^2 \right) dx = \cdots = 20.
\end{aligned}
$$

(Grupa 2) Analognim postupkom kao za grupu 1 dobijamo

$$
I = 12.
$$

3. (Grupa 2) Protok vektorskog polja $\vec{A}$ je

$$
\begin{aligned}
\Phi_\Gamma(\vec{A}) &= \iint_\Gamma \frac{x^3}{4} dydz + y^3 dzdx + \frac{z^3}{4} dxdy = \left\{ \begin{array}{c} \text{formula} \\ \text{Gaus-Ostrogradskog} \end{array} \right\} \\
&= \iiint_T \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^3}{4} + \frac{\partial}{\partial y} y^3 + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z^3}{4} \right) dxdydz \\
&= \iiint_T \left(\frac{3x^2}{4} + 3y^2 + \frac{3z^2}{4} \right) dxdydz \\
&= 3 \iiint_T \left(\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} \right) dxdydz.
\end{aligned}
$$

Ovde je sa Γ označen dati elipsoid $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4y = 0$, a sa T njegova unutrašnjost (uključujući i granicu),

$$T:\ x^2+4y^2+z^2+4y\leq 0,$$

odnosno

$$T:\ x^2+4y^2+z^2\leq -4y.$$

Prelaskom na uopštene sferne koordinate

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\quad y=\frac{1}{2}\rho\cos\theta,\quad z=\rho\sin\varphi\sin\theta,$$

telo T transformišemo u telo

$$U:\ \rho^2\leq -4\frac{1}{2}\rho\cos\theta,$$

odnosno, za telo U važi

$$\rho\leq -2\cos\theta.$$

Odavde sledi $\rho|_0^{-2\cos\theta}$. S obzirom da je ρ nenegativno i da važi $\rho\leq -2\cos\theta$, mora biti ispunjeno $-2\cos\theta\geq 0$, odakle sledi $\cos\theta\leq 0$, pa je $\theta|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$. Važi i $\varphi|_0^{2\pi}$, a jakobijan je $J=\dfrac{1}{2}\rho^2\sin\theta$.

Dalje je

$$\begin{aligned}
\Phi_\Gamma(\vec{A}) &= 3\iiint\limits_U \frac{1}{4}\rho^2\cdot\frac{1}{2}\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta\\
&= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{-2\cos\theta}\rho^4 d\rho\\
&= \frac{3}{8}\cdot\varphi|_0^{2\pi}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta\cdot\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^{-2\cos\theta}d\theta\\
&= \frac{3}{8}\cdot 2\pi\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta\cdot\frac{-32\cos^5\theta}{5}d\theta=\frac{24\pi}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^5\theta(-\sin\theta)d\theta\\
&= \left\{\begin{array}{c}\text{smena }\cos\theta=t\\ -\sin\theta d\theta=dt\\ \theta=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0\\ \theta=\pi\Rightarrow t=-1\end{array}\right\}=\frac{24\pi}{5}\int_0^{1}t^5dt=\frac{24\pi}{5}\left.\frac{t^6}{6}\right|_0^{-1}=\frac{4\pi}{5}.
\end{aligned}$$

(Grupa 1) Analognim postupkom kao za grupu 2, s tim što x i y zamene uloge, dobijamo isto rešenje

$$\Phi_\Gamma(\vec{A}) = \frac{4\pi}{5}.$$

4. (Grupa 2) Važi

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{A} &= \nabla \circ \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \circ (2y + 2z^2, 2yz + 2x, 4xz + y^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2y + 2z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2yz + 2x) + \frac{\partial}{\partial z}(4xz + y^2) = 4x + 2z,\end{aligned}$$

dok je

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y + 2z^2 & 2yz + 2x & 4xz + y^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(4xz + y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2yz + 2x)\right) \vec{i} \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x}(4xz + y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2y + 2z^2)\right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(2yz + 2x) - \frac{\partial}{\partial y}(2y + 2z^2)\right) \vec{k} \\ &= (2y - 2y)\,\vec{i} + (4z - 4z)\,\vec{j} + (2 - 2)\,\vec{k} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Kako postoji tačka u kojoj je $\mathrm{div}\vec{A} \neq 0$ (na primer u tački $M_0 = (0, 0, 1)$je $\mathrm{div}\vec{A}(M_0) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 \neq 0$) i kako je $\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{0}$ u svakoj tački, to je dato vektorsko polje potencijalno.

(Grupa 1) Sličnim postupkom kao za grupu 2 dobijamo

$$\mathrm{div}\vec{A} = -6, \quad \mathrm{rot}\vec{A} = \vec{0},$$

odakle zaključujemo da je dato vektorsko polje potencijalno.