

~ DODATAK ~

IZABRANA POGLAVLJA

IZ

PLANIMATERIJE

Ovaj deo praktikuma posvećen je rekapitulaciji gradiva iz nekih oblasti planimetrije koje je neophodno za rešavanje, pre svega, prostornih i metričkih zadataka iz konstruktivne geometrije i grafike. Takođe je poznavanje planimetrije značajno za ispravno oblikovno i dimenziono definisanje (posebno za razumevanje uvrednjavanja – “kotiranja”) različitih mašinskih delova, koje se predaje na kursovima inženjerske grafike i tehničkog crtanja. Osim toga, izložene definicije, teoreme i geometrijske konstrukcije mogu da budu korisna pomoć i prilikom savladavanja gradiva iz nekih drugih predmeta i kurseva koji se predaju na Mašinskom fakultetu u Beogradu, svuda tamo gde se planimetrija koristi i gde se podrazumeva da je već savladana i usvojena.

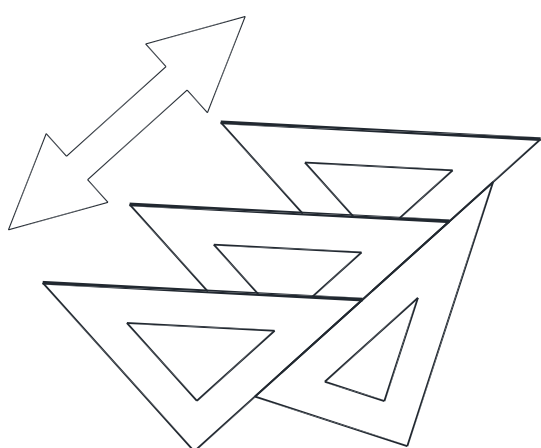
Posebno naglašavamo da crtanje i skiciranje, koji se tako često koriste u svim oblastima mašinstva, ne mogu biti sprovedeni korektno, ukoliko se ne poznaju i ne koriste bar elementarne planimetrijske konstrukcije. Jer, kao što se ne može ništa napisati ispravno i smisleno čak ni na maternjem jeziku bez poznavanja normativne gramatke tog maternjeg jezika, tako se ne može ni grafički i vizuelno sporazumevati bez znanja planimetrije – nezavisno da li se crta slobodnom rukom ili pomoću neke kompjuterske aplikacije. Zato se savetuje svim studentima da prouče i zapamte gradivo iz ovog dodatka postojećem praktikumu, a posebno onima koji su planimetriju zaboravili ili je nikada nisu ni učili u osnovnoj ili srednjoj školi.

U ovom dodatku praktikuma izabrana su i obrađena sledeća poglavlja iz planimetrije:

0. Upotreba trougaonih lenjira za crtanje
1. Značajne tačke u trouglu
2. Podudarnost i sličnost trouglova
3. Simetrala duži i ugla; podela duži na jednake delove; konstrukcije nekih uglova
4. Konstrukcije nekih pravilnih poligona
5. Pitagorina teorema
6. Neki stavovi o kružnici
7. Približne rektifikacije kružnice i kružnog luka
8. Konstrukcije elipse

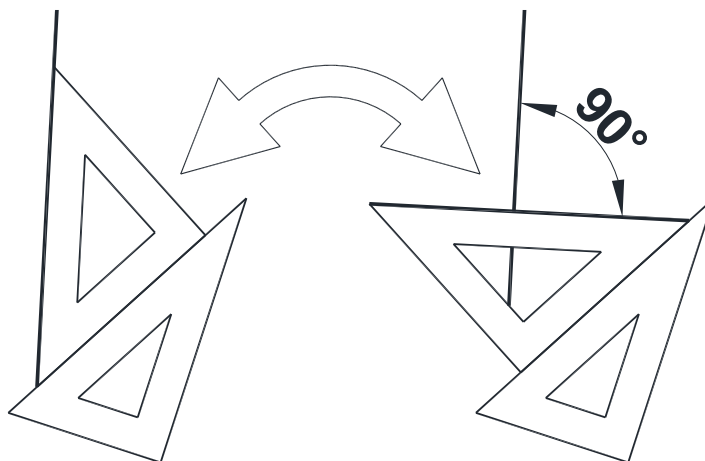
0. UPOTREBA TROUGAONIH LENJIRA ZA CRTANJE PARALELNIH I ORTOGONALNIH PRAVIH LINIJA

Paralelne prave crtaju se isključivo i uvek sa dva trougaona lenjira, kako je prikazano na slici D0-1. Pokretni trougaoni lenjir vrši translatorno kretanje, dok njegova kateta kliza po hipotenuzi nepokretnog – fiksiranog trougla. Uzastopni položaji hipotenuze tako pokretnog trougla definišu međusobno paralelne prave linije, koje se ucrtavaju saglasno potrebama konkretnog zadatka, odnosno, određenog konstruktivnog postupka.



Slika D0-1

*Crtanje paralelnih pravih linija –
translacija trougaonog lenjira*



Slika D0-2

*Crtanje ortogonalnih pravih linija – rotacija
trougaonog lenjira za 90°*

Ortogonalne prave crtaju se isključivo i uvek sa dva trougaona lenjira, kako je prikazano na slici D0-2. Pokretni trougaoni lenjir vrši rotaciju – obrtanje za 90° oko temena pravog ugla, dok se njegove katete naizmenično naslanjaju na hipotenuzu nepokretnog – fiksiranog trougla. U prvobitnom položaju, hipotenuza pokretnog trougla poklapa se sa datom pravom, a jedna njegova kateta naleže na hipotenuzu nepokretnog – fiksiranog trougla. Pokretni trougao se zatim obrće oko temena pravog ugla za 90° , tako da druga kateta nalegne na hipotenuzu nepokretnog lenjira. U ovom, rotiranom položaju, hipotenuza pokretnog lenjira zaklapa prav ugao sa datom pravom, pa se duž nje mogu nacrtati prave linije koje su upravne na datu pravu.

1. ČETIRI ZNAČAJNE TAČKE TROUGLA

Za svaki trougao definisane su sledeće četiri značajne tačke: centar opisane kružnice, centar upisane kružnice, ortocentar i težište.

Napomena: Težište trougla je invarijanta paralelnog projektovanja – projiciranja. To znači da se, paralelnim projektovanjem, težište trougla projicira u težište projekcije tog trougla. Nasuprot ovoj činjenici, centar opisane i centar upisane kružnice, kao i ortocentar trougla nisu invarijante projiciranja (projektovanja) trougla. Drugim rečima, ni centar opisane, niti centar upisane kružnice, kao ni ortocentar trougla neće se projektovati - projicirati (ni centralnim, ni paralelnim projektovanjem) u, redom, centar opisane, centar upisane kružnice i ortocentar projekcije trougla.

1. Centar opisane kružnice

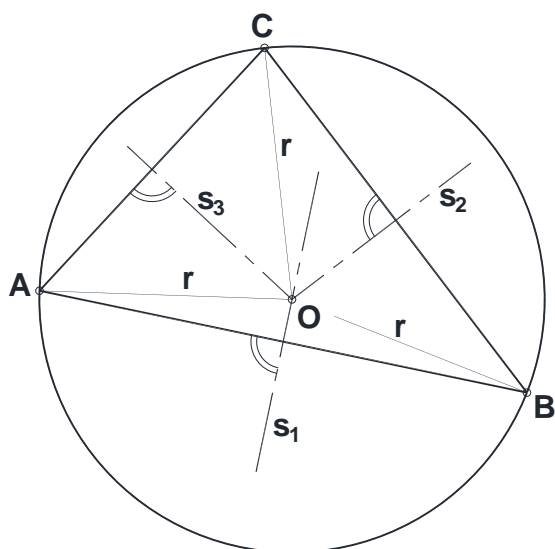
Centar O opisane kružnice oko trougla $\triangle ABC$ (Sl. D1-1) je centar one kružnice koja sadrži sva tri temena datog trougla. Zato se centar O opisane kružnice oko trougla $\triangle ABC$ konstruiše kao presek simetrala s_1, s_2 i s_3 stranica AB, BC i CA datog trougla ABC .

($s_1 \cap s_2 = O; s_1 \cap s_3 = O; s_2 \cap s_3 = O, OA = OB = OC = r$), r – poluprečnik opisane kružnice

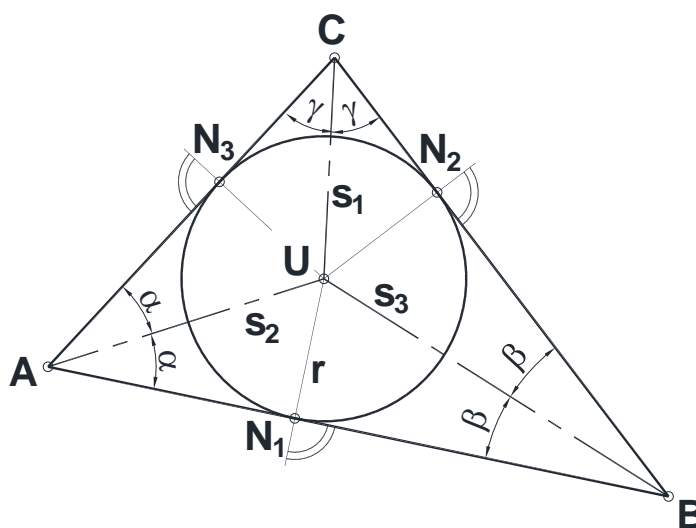
2. Centar upisane kružnice

Centar U kružnice upisane u trougao $\triangle ABC$ (Sl. D1-2) je centar one kružnice koja dodiruje (tangira) sve tri stranice datog trougla. Zato se centar U kružnice koja je upisana u trougao $\triangle ABC$ konstruiše kao presek simetrala s_1, s_2 i s_3 uglova $2\alpha, 2\beta$ i 2γ u temenima datog trougla $\triangle ABC$.

($s_1 \cap s_2 = U, s_1 \cap s_3 = U, s_2 \cap s_3 = U, UN_1 = UN_2 = UN_3 = r$), r – poluprečnik upisane kružnice



Slika D1-1
Centar opisane kružnice trougla



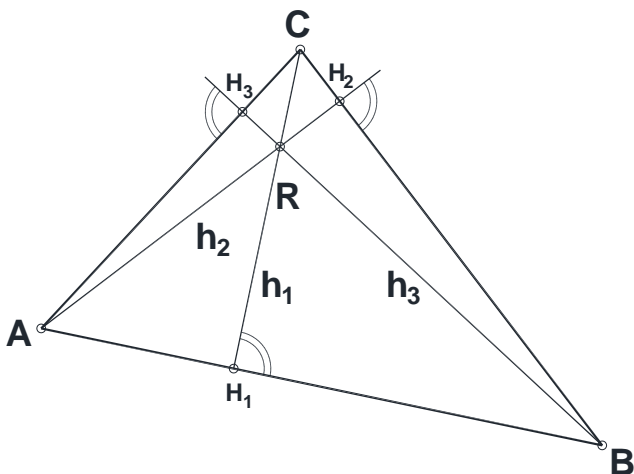
Slika D1-2
Centar upisane kružnice trougla

3. Ortocentar

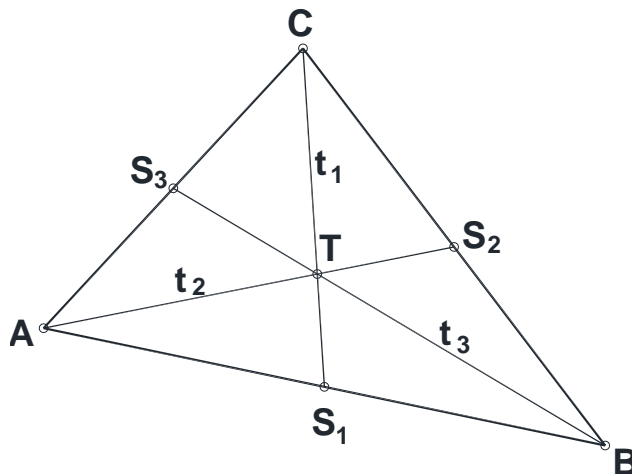
Ortocentar R trougla $\triangle ABC$ (Sl. D1-3) je presek visina $h_1=CH_1$, $h_2=AH_2$ i $h_3=BH_3$ datog trougla. Visina trougla sadrži jedno njegovo teme i ortogonalna je na, datom temenu, suprotnu stranicu. ($h_1 \cap h_2 = R$, $h_1 \cap h_3 = R$, $h_2 \cap h_3 = R$)

4. Težište

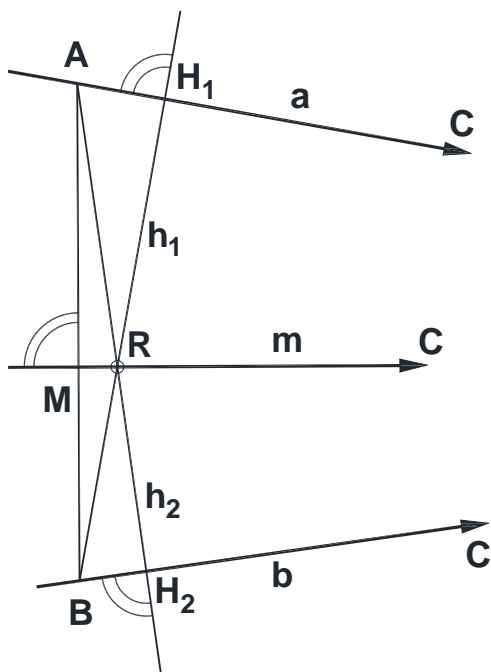
Težište T trougla $\triangle ABC$ (Sl. D1-4) je presek težišnih duži t_1 , t_2 i t_3 datog trougla. Težišna duž trougla sadrži jedno njegovo teme i središte, datom temenu, suprotne stranice. Težište deli težišnu duž u odnosu 2:1. ($t_1 \cap t_2 = T$, $t_1 \cap t_3 = T$, $t_2 \cap t_3 = T$, $CT = 2TS_1$, $AT = 2TS_2$, $BT = 2TS_3$)



Slika D1-3
Ortocentar trougla



Slika D1-4
Težište trougla

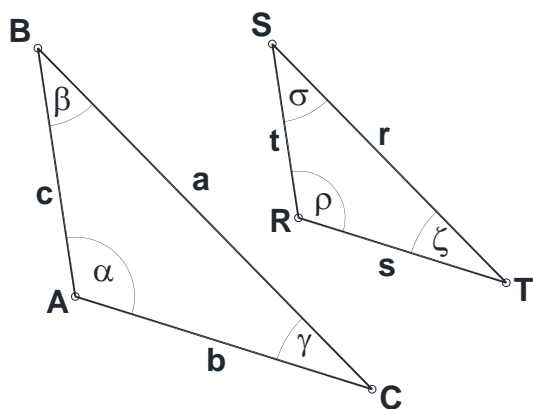


Slika D1-5
Prava kroz tzv. "nedostižnu tačku"

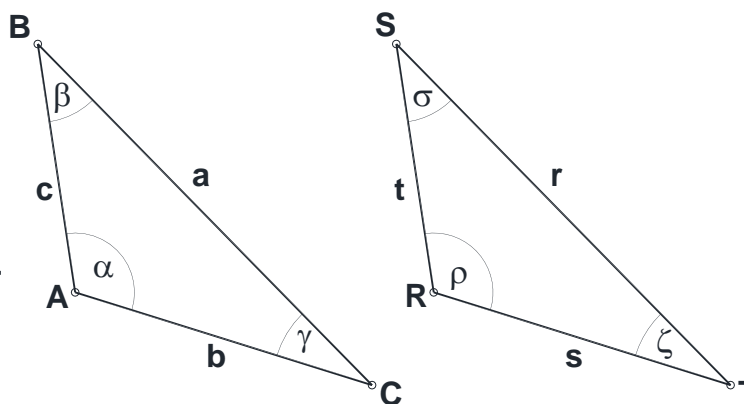
Konstruktivna svojstva ortocentra mogu da se iskoriste za definisanje prave kroz tzv. "nedostižnu tačku" (slika D1-5). Ovaj problem se, inače, često pojavljuje u praksi. Ako je prava m zadata tačkama R i C , od kojih je C veoma udaljena presečna tačka datih pravih a i b , ili ove prave obrazuju veoma mali presečni ugao (u oba slučaja tačka C je "nedostižna" – fizički ili konstruktivno), tražena prava m može se definisati i konstruisati na sledeći način. Kroz zadatau tačku R uočavaju se prave h_1 i h_2 , tako da je $h_1 \perp a$, $h_2 \perp b$. Prave h_1 i h_2 seku prave a i b u sledećim tačkama: $h_1 \cap a = H_1$, $h_1 \cap b = B$, $h_2 \cap a = A$, $h_2 \cap b = H_2$. Tako je formiran trougao $\triangle ABC$ u kome su BH_1 i BH_2 njegove visine, a tačka R je ortocentar ovog trougla. Kao što je prikazano na slici D1-5, tražena prava m , koja sadrži tačku R , a ortogonalna je na stranicu AB ($m \perp AB$) sadržiće teme C ($m=MC$), kao pravac treće visine trougla $\triangle ABC$. Time je rešen konstruktivno - grafički problem "nedostižne tačke".

2. SLIČNOST I PODUDARNOST TROUGLOVA

Trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle RST$ (Sl. D2-1) slični su ($\triangle ABC \sim \triangle RST$) ako su im odgovarajući uglovi jednaki ($\alpha = \rho$, $\beta = \sigma$, $\gamma = \zeta$), a odgovarajuće stranice proporcionalne ($a:b:c=r:s:t$).



Slika D2-1
Sličnost trouglova



Slika D2-2
Podudarnost trouglova

Da bi trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle RST$ bili slični ($\triangle ABC \sim \triangle RST$), dovoljno je da su:

- jednaka dva para odgovarajućih uglova ($\alpha = \rho$, $\beta = \sigma$)
- proporcionalna dva para odgovarajućih stranica i jednak jedan par uglova koje obrazuju te stranice ($a:b=r:s$, $\gamma = \zeta$)
- proporcionalna dva para odgovarajućih stranica i jednak jedan par uglova nasuprot većim stranicama ($a:c=r:t$, $\alpha = \rho$, $a > c$, $r > t$)
- proporcionalna sva tri para odgovarajućih stranica ($a:b:c=r:s:t$).

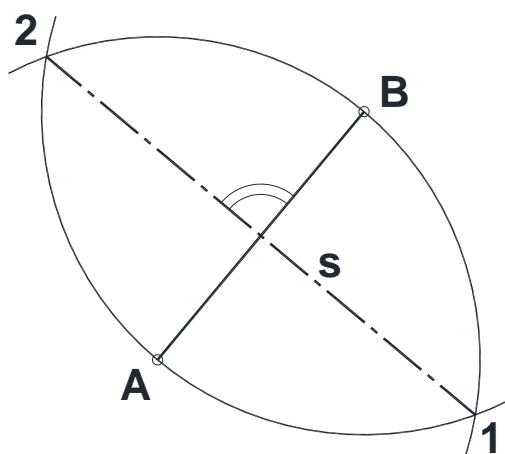
Trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle RST$ (Sl. D2-2) podudarni su ($\triangle ABC \cong \triangle RST$) ako su im i odgovarajući uglovi i odgovarajuće stranice jednake ($\alpha = \rho$, $\beta = \sigma$, $\gamma = \zeta$, $a=r$, $b=s$, $c=t$). Da bi trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$ bili podudarni ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$) dovoljno je:

- da je jednak jedan par stranica i dva para uglova uz te stranice ($a=r$, $\beta = \sigma$, $\gamma = \zeta$)
- da su jednaka dva para odgovarajućih stranica i par uglova između njih ($a=r$, $b=s$, $\gamma = \zeta$)
- da su jednaka dva para odgovarajućih stranica i jedan par uglova nasuprot većim stranicama ($a=r$, $c=t$, $\alpha = \rho$, $a > c$, $r > t$)
- da su jednaka sva tri para odgovarajućih stranica ($a=r$, $b=s$, $c=t$)

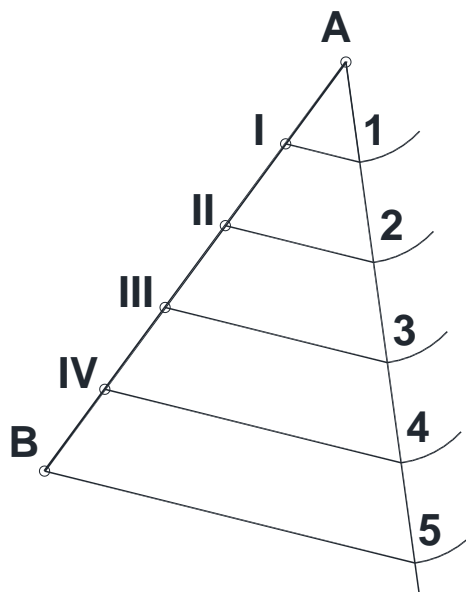
3. SIMETRALA DUŽI I UGLA; PODELA DUŽI NA JEDNAKE DELOVE; KONSTRUKCIJE NEKIH UGLOVA

Simetrala s duži AB (Sl. D3-1) može se konstruisati kao spojnica presečnih tačaka 1 i 2 dva kružna luka jednakih poluprečnika, čiji su centri u tačkama A i B . Simetrala s je ortogonalna na duž AB .

Podela duži AB na N jednakih delova prikazana je na slici D3-2, za $N=5$. Kroz tačku A postavljena je proizvoljna prava i na njoj je uočeno N jednakih segmenata $A-1-2-3-...$, ($A1=I2=23=...$), proizvojnje dužine. Poslednja, N -ta tačka niza segmenata spojena je sa tačkom B duži AB i, paralelno sa pravom BN ($B-5$), postavljen je pramen paralelnih pravih kroz tačke $I, 2, 3 \dots N$. Ove prave seku duž AB u tačkama $I, II, III, IV \dots$ i dele duž AB na N jednakih delova. Opisana konstrukcija zasniva se na sličnosti trouglova $\triangle AB5 \sim \triangle A(IV)4 \sim \triangle A(III)3 \sim \dots \sim \triangle AII$.



Slika D3-1
Simetrala duži - s

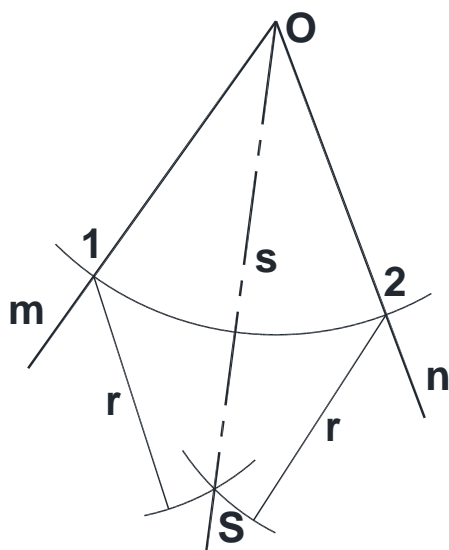


Slika D3-2
Podela duži na N ($N=5$) jednakih delova

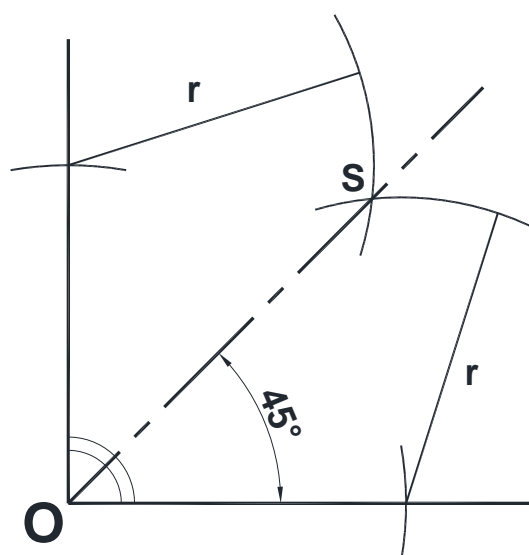
Konstrukcija simetrale ugla $\angle Omn$ prikazana je na slici D3-3. Oba kraka (Om i On) zasečena su u tačkama 1 i 2 jednim istim kružnim lukom, proizvoljnog poluprečnika, sa centrom u temenu O . Zatim je konstruisan presek S dva kružna luka istog poluprečnika, sa sentrima u tačkama 1 i 2 . Poluprava OS je simetrala s ugla $\angle Omn$. Simetrala ugla suplementnog ugla $\angle Omn$ ortogonalna je nasimetralu s ugla $\angle Omn$.

Konstrukcija ugla od 45° prikazana je na slici D3-4, kao simetrapravog ugla.

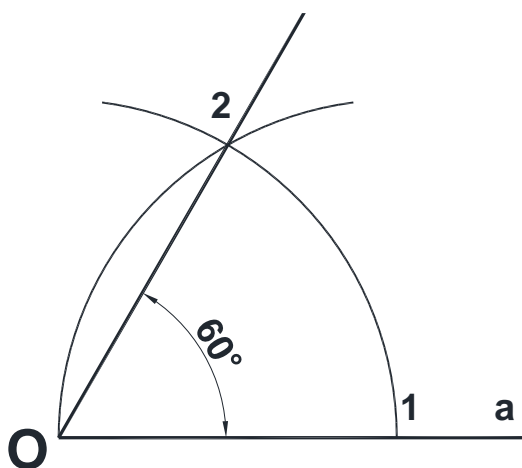
Ugao od 60° konstruiše se presekom dva kružna luka istog poluprečnika, tako da se centar jednog luka nalazi na periferiji drugog. Kao što je prikazano na slici D3-5, poluprava Oa zasečena je u tački 1 kružnim lukom proizvoljnog poluprečnika. Novi kružni luk, sa centrom u tački 1 , istog poluprečnika kao i prethodni, seče taj prethodni luk u tački 2 . Ugao $\angle IO2=60^\circ$.



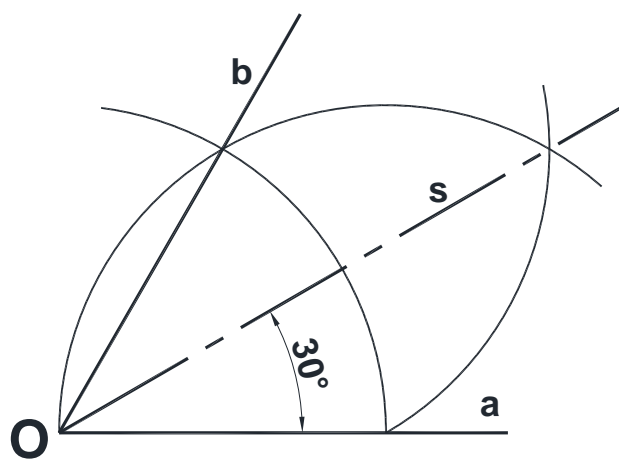
Slika D3-3
Simetrala ugla - s



Slika D3-4
Konstrukcija ugla od 45° - simetrala pravog ugla



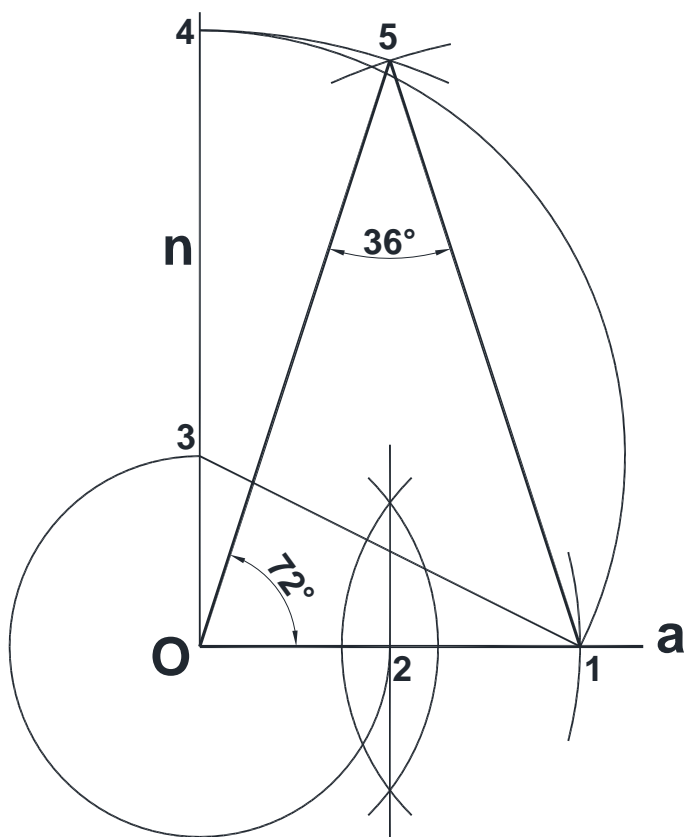
Slika D3-5
Konstrukcija ugla od 60°



Slika D3-6
Konstrukcija ugla od 30° - simetrala ugla od 60°

Konstrukcija ugla od 30° prikazana je na slici D3-6, kao simetra ugla od 60° .

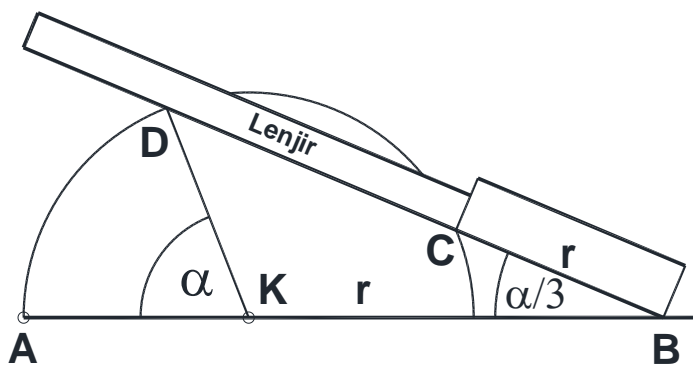
Konstrukcije uglova od 90° , 60° , 45° i 30° , prikazane na slikama od D3-4 do D3-6, elementarne su. Primenom navedenih konstrukcija odnosno, korišćenjem njihovih jednostrukih i višestrukih uzastopnih simetrala mogu se konstruisati i mnogi drugi uglovi, kao na primer: 150° , 120° , 105° , $82,5^{\circ}$, 75° , $67,5^{\circ}$, $52,5^{\circ}$, $37,5^{\circ}$, $22,5^{\circ}$, 15° , itd.



Slika D3-7
Konstrukcija uglova od 36° i 72°

Na slici D3-7 prikazana je nešto složenija konstrukcija uglova od 36° i 72° . Na proizvoljnoj polipravoj Oa uočena je proizvoljna tačka I i konstruisana simetrala duži OI koja polovi ovu duž u tački 2 . (Ili je proizvodnja dužina $O2$ udvostručena do tačke I .) U tački O konstruisana je normala n na polupravu Oa i na tu normalu prenesena je dužina $O2$ tako da $O2=O3$. Kružnim lukom, sa centrom u tački 3 , poluprečnika $r = \overline{3I}$, zasečena je normala On u tački 4 . I konačno, određena je presečna tačka 5 dva kružna luka jednakih poluprečnika $r=O4$, sa centrima u tački O i tački I . Kao što je prikazano na slici D3-7, trougao $\Delta O15$ je jednakokrak, sa uglovima $\angle 5O1=72^{\circ}$, $\angle O5I=36^{\circ}$. Izloženi postupak koristi se, između ostalog, za konstruisanje zlatnog preseka odnosno, zlatne razmere, pravilnog petougla, pentagrama i pravilnog desetougla.

Pomenimo i trisekciju ugla koja, kao što je poznato, ne može da se ostvari klasičnom upotrebom šestara i lenjira odnosno, kružnice i prave. Međutim, uz malu modifikaciju pojma „lenjir“, kao i njegove upotrebe, ova konstrukcija može da se realizuje apsolutno tačno. Naime, neophodno je da se dozvoli označavanje dužina na lenjiru (što je inače zabranjeno u klasičnim geometrijskim konstrukcijama). Na slici D3-8 prikazan je postupak apsolutno tačne trisekcije ugla α .



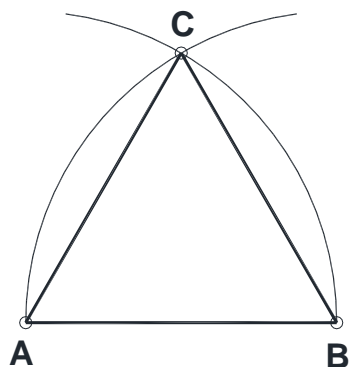
Slika D3-8
Trisekcija ugla α

Na jednom kraju lenjira označena je proizvoljna dužina r . Sa centrom u temenu K , opisan je polukrug poluprečnika r koji seče krake ugla α u tačkama A i D . Lenjir se postavlja tako da jedan kraj označene dužine r leži na pravoj AK u tački B , a da drugi kraj te iste dužine r pripada periferiji polukruga u tački C . Lenjir se zatim pomera tako da tačka B klizi po pravoj AK , a u istom mah tačka C po kružnici sve dok tačka D ne pripadne ivici lenjira. U tom specifičnom položaju, koji je prikazan na slici D3-8, izvršena je trisekcija ugla α , tako da je $\angle DBA = \frac{1}{3} \alpha$.

4. KONSTRUKCIJE NEKIH PRAVILNIH POLIGONA

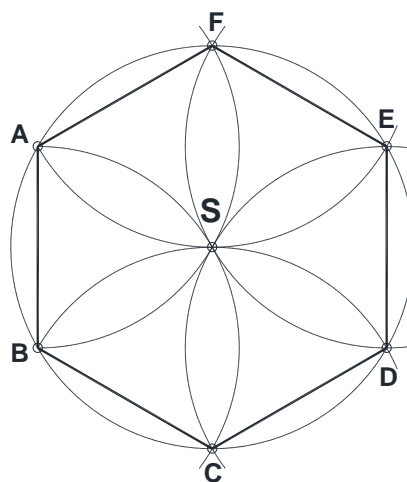
Konstrukcija jednakostraničnog trougla $\triangle ABC$, ako je poznata stranica AB , prikazana na slici D4-1 i zasniva se na konstrukciji ugla od 60° . Dva kružna luka, istih poluprečnika $r=AB$, jedan sa centrom u tački A , drugi sa centrom u tački B , seku se u tački C jednakostraničnog trougla $\triangle ABC$.

Konstrukcija pravilnog šestougla $ABCDEF$ prikazana je na slici D4-2 i zasniva se na već objašnjenj konstrukciji jednakostraničnog trougla odnosno, ugla od 60° . Ako je zadata stranica AB , potrebno je najpre da se konstruiše centar opisane kružnice S pravilnog šestougla, tako da je trougao $\triangle ABS$ jednakostraničan. Kao što je prikazano na slici D4-2, opisane kružnice, sa centrom u tački S i poluprečnika $r=SA=SB$, deli kružni luk istog poluprečnika r na šest jednakih delova, čime je konstrukcija pravilnog šestougla $ABCDEF$ završena. Ako je poznat centar opisane kružnice S i jedno teme šestougla, postupak se svodi na već objašnjenu konstrukciju.



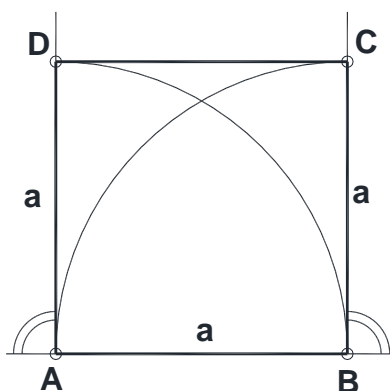
Slika D4-1

Konstrukcija jednakostraničnog trougla



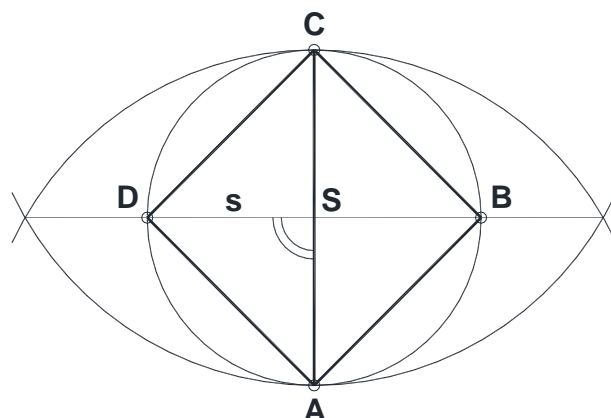
Slika D4-2

Konstrukcija pravilnog šestougla



Slika D4-3

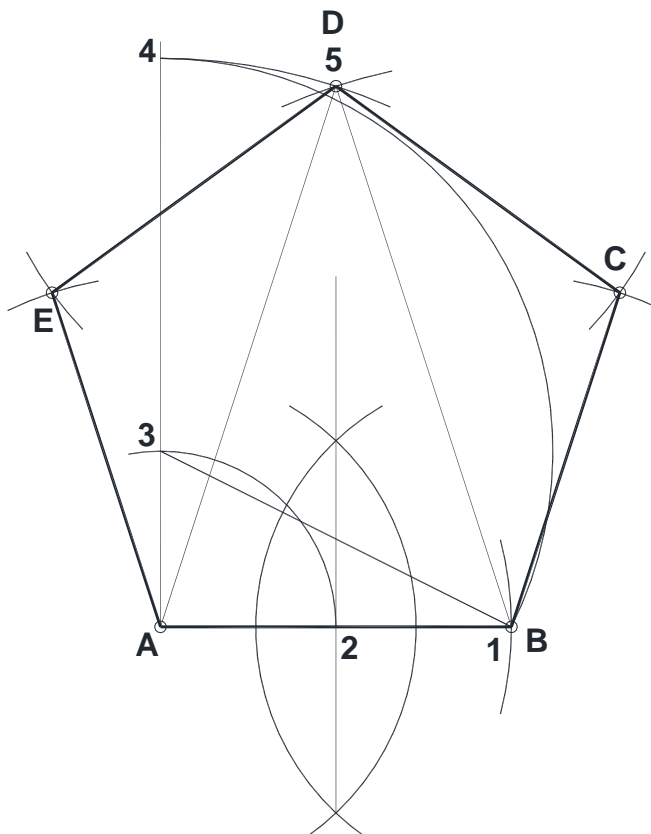
Konstrukcija kvadrata iz poznate stranice AB



Slika D4-4

Konstrukcija kvadrata iz poznate dijagonale AC

Na slici D4-3 prikazana je konstrukcija kvadrata $ABCD$, ako je poznata stranica AB , a na slici D4-4, kada je zadata dijagonala AC . Ako je poznata stranica, u tačkama A i B postavljaju se normale na datu stranicu, a zatim se na te normale prenosi dužina stranice $a=AB$, čime su dobijena temena D i C . Ako je poznata dijagonala AC , potrebno je odrediti njenu simetralu s i središte $S = s \cap AC$. Kružni luk sa središtem u tački S , poluprečnika $r=SA=SC$ seče simetralu s u tačkama D i B .

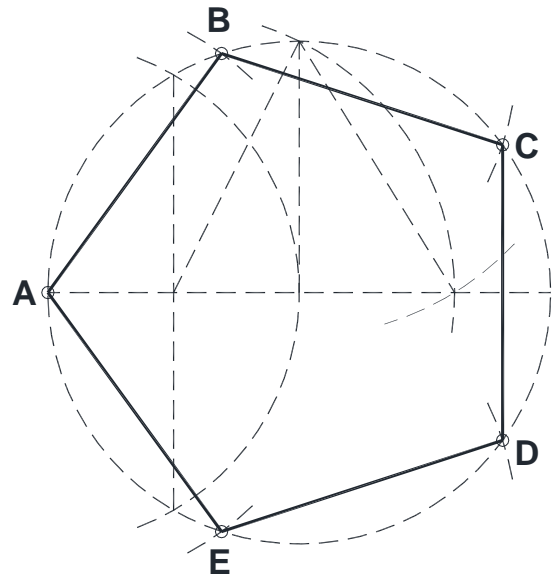
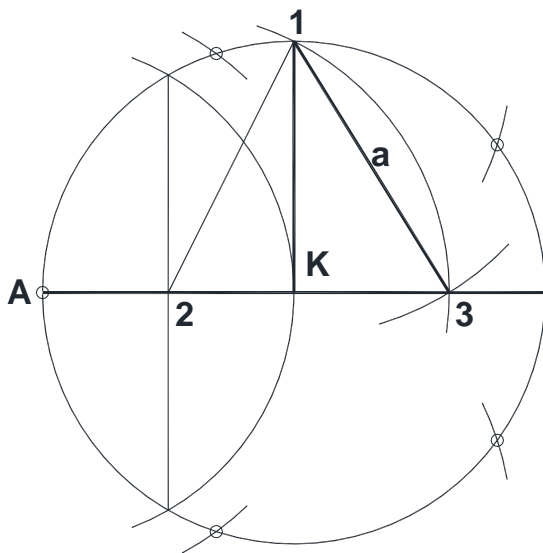


Slika D4-5

Konstrukcija pravilnog petougla ABCDE kada je poznata stranica AB

Konstrukcija pravilnog petougla $ABCDE$, kada je poznata stranica AB prikazana je na slici D4-5 i u svemu je jednaka već opisanoj konstrukciji uglova od 36° i 72° , na slici D3-7, uz napomenu da proizvodnju duž OI sada predstavlja data stranica AB . Tačka 5 je teme D , a tačke E i C dobijaju se presekom kružnih lukova poluprečnika $r=AB$, sa centrima u temenima A, B i D .

Konstrukcija pravilnog petougla $ABCDE$, kada je poznat centar K opisane kružnice i jedno teme A , prikazana je na slici D4-5 - levo. U centru K uočena je normal na duž AK , koja seče opisane kružnicu u tački I . Kružni luk sa centrom u tački 2, koja je središte duži AK , poluprečnika $r = \overline{21}$, seče pravac AK u tački 3. Duž $\overline{31} = a$ predstavlja stranicu pravilnog petougla $ABCDE$. Kao što je prikazano na slici D4-5 - desno, kružni luk, poluprečnika $r=a$ seče opisane kružnicu, počevši od tačke A na obe strane, u temenima B, C, D i E pravilnog petougla.

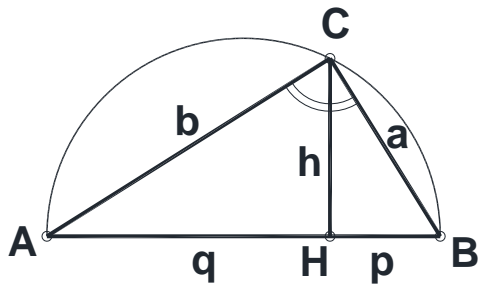


Slika D4-5

Konstrukcija pravilnog petougla ABCDE kada je poznat centar K opisane kružnice i jedno teme A

5. PITAGORINA TEOREMA

U svakom pravouglom trouglu, kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad obe katete (Slike D5-1, D5-2 i D5-3). Ubraja se u najznačajnije teoreme geometrije i može se izvesti odnosno, dokazati na mnogo različitih načina. Neposredno sledi iz sličnosti pravouglih trouglova (Sl. D5-1) odnosno, Euklidovih stavova o srednjim geometrijskim proporcionalama (U svakom pravouglom trouglu, visina nad hipotenuzom srednja je geometrijska proporcionala odsečaka na hipotenuzi, a svaka kateta srednja je geometrijska proporcionala hipotenuze i odsečka hipotenuze uz tu katetu.)



Slika D5-1

Iz sličnosti pravouglih trouglova ABC , AHC i BCH $\triangle ABC \sim \triangle AHC \sim \triangle BCH$, slede tzv. Euklidovi stavovi o srednjim geometrijskim proporcionalama:

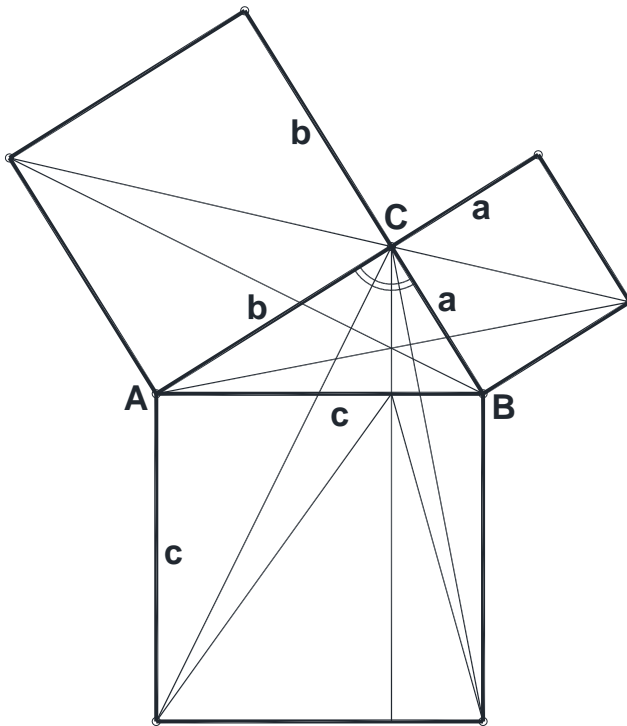
$$h:q=p:h, h^2=p \cdot q, h = \sqrt{p \cdot q};$$

$$a:(p+q)=p:a, a^2=p \cdot (p+q), a = \sqrt{p \cdot (p+q)};$$

$$b:(p+q)=q:b, b^2=q \cdot (p+q), b = \sqrt{q \cdot (p+q)};$$

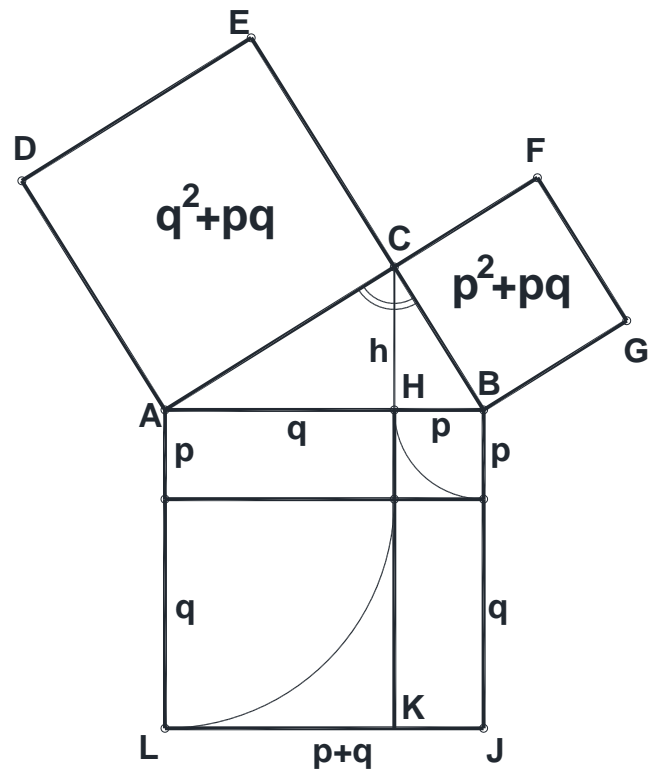
Iz ovih stavova neposredno sledi Pitagorina teorema:

$$a^2+b^2 = p \cdot (p+q) + q \cdot (p+q) = p^2 + 2 \cdot p \cdot q + q^2 = (p+q)^2$$



Slika D5-2

Pitagorina teorema: $a^2+b^2=c^2$
~ dokaz bez reči ~

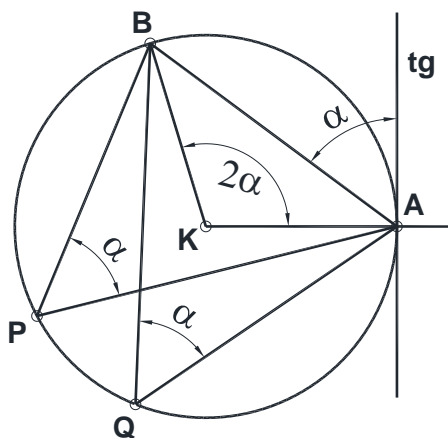


Slika D5-3

Pitagorina teorema:
~ geometrijsko - algebarski dokaz ~
 $ADEC = AHKL$; $BCFG = HBJK$;
 $ABJL = AHKL + HBJK = ADEC + BCFG$

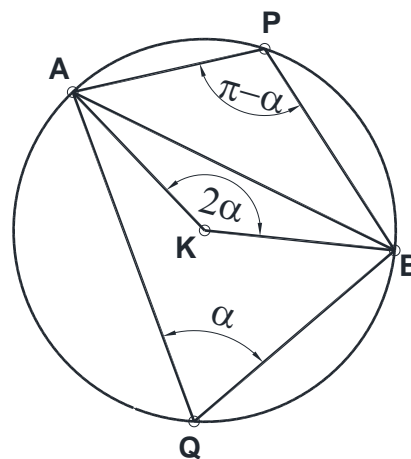
6. NEKI STAVOVI O KRUŽNICI

Periferijski uglovi nad zajedničkom tetivom kružnice i sa iste strane tetive (sl. D6-1) jednaki su. Periferijski ugao dvostruko je manji od centralnog ugla nad istom tetivom kružnice, ako se oba ugla nalaze sa iste strane tetive (sl. D6-1). Periferijski ugao nad tetivom kružnice jednak je uglu između tetive i tangente kružnice, ako se ova dva ugla nalaze sa različitih strana tetive (sl. D6-1).



Slika D6-1

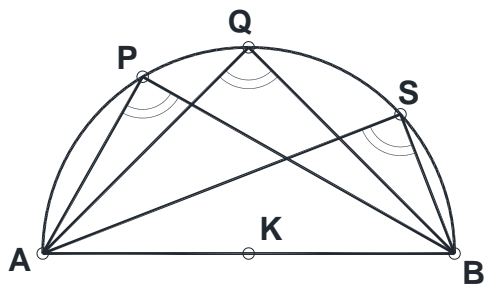
Centralni ugao i periferijski uglovi nad istom tetivom; ugao između tangente i tetive kružnice



Slika D6-2

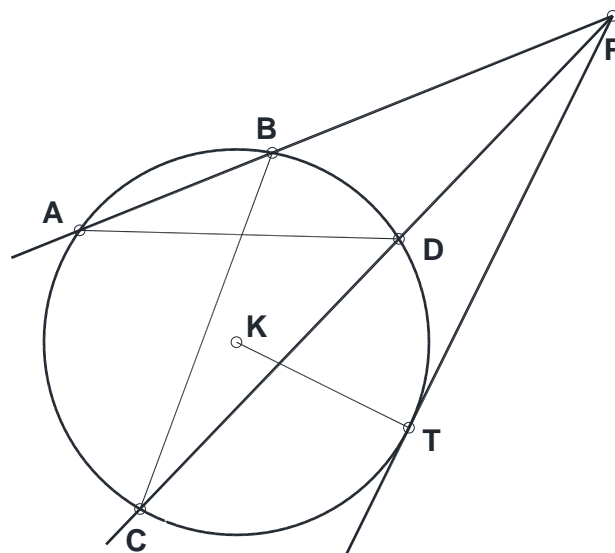
Centralni ugao i periferijski uglovi sa suprotnih strana zajedničke tetive kružnice

Dva periferijska ugla nad zajedničkom tetivom kružnice suplementna su ako se nalaze sa različitih strana tetive (sl. D6-2). Periferijski uglovi nad zajedničkim prečnikom kružnice su pravi. (sl. D6-3).



Slika D6-3

Periferijski uglovi nad istim prečnikom su pravi.



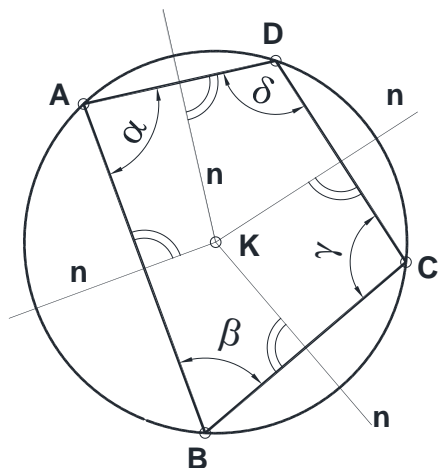
Slika D6-4

Potencija tačke u odnosu na krug
 $(TP)^2 = (AP) \cdot (BP) = (CP) \cdot (DP)$

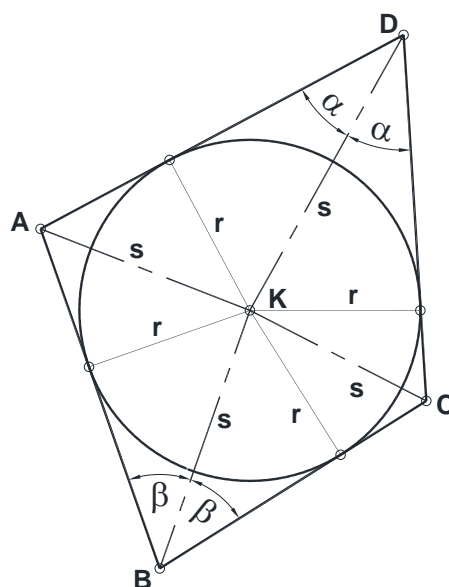
Trouglovi $\triangle ADP$ i $\triangle CBP$ (sl. D6-4) slični su ($\triangle ADP \sim \triangle CBP$), saglasno stavovima o periferijskim uglovima nad zajedničkom tetivom kružnice. Odatle proishodi proporcija $AP:CP=DP:BP$. Ako sekanta CP zauzme granični položaj tangente TP , onda će biti $CP=TP$ i $DP=TP$, a prethodna proporcija postaće srednja geometrijska proporcionala $(TP)^2 = (AP) \cdot (BP)$ i zove se potencija tačke P u odnosu na dati krug.

Tetivni četvorougao $ABCD$ (sl. D6-5) je četvorougao oko koga se može opisati kružnica. Centar K opisane kružnice zajednička je presečna tačka simetrala n sve četiri stranice tetivnog četvorougla $ABCD$. U tetivnom četvorouglu suprotni uglovi su suplementni: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$. Poluprečnik opisane kružnice tetivnog četvorougla je $r = KA = KB = KC = KD$.

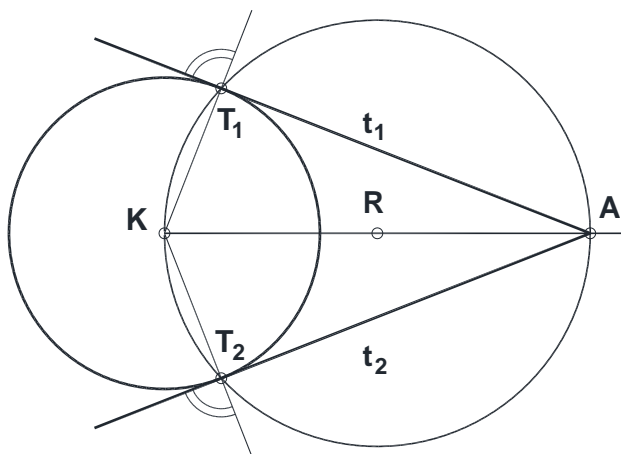
Tangentni četvorougao $ABCD$ (sl. D-6) je četvorougao u koga se može upisati kružnica. Centar K upisane kružnice zajednička je presečna tačka simetrala s sva četiri ugla tangentnog četvorougla $ABCD$. U tangentnom četvorouglu $ABCD$ zbir dužina jednog para suprotnih stranica jednak je zbiru dužina drugog para suprotnih stranica: $AB + CD = BC + AD$.



Slika D6-5
Tetivni četvorougao



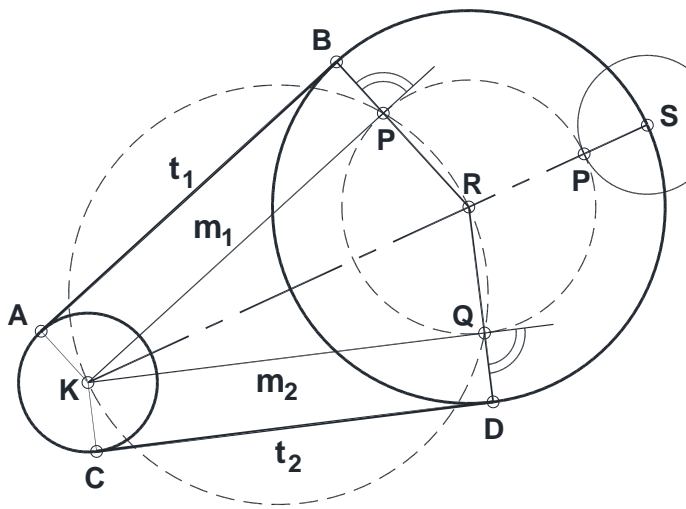
Slika D6-6
Tangentni četvorougao



Slika D6-7
Konstrukcija tangenti na kružnicu središta K iz proizvoljne tačke A

Konstrukcija tangente na kružnicu središta K iz proizvoljne tačke A prikazana je na slici D6-7. Nova, pomoćna kružnica prečnika $2r = KA$ odnosno, poluprečnika $r = RK = RA$, seče datu kružnicu u tačkama T_1 i T_2 . Saglasno stavu da su periferijski uglovi $\angle KT_1A$ i $\angle AT_2K$ nad prečnikom KA pravi, prave $t_1 = AT_1$ i $t_2 = AT_2$ su tražene tangente na datu kružnicu, iz zadate tačke A .

Konstrukcija zajedničkih tangenti na dve zadate kružnice, različitih poluprečnika prikazana je na slici D6-8. Prva kružnica, manjeg poluprečnika r_1 , ima centar u tački K , a druga kružnica, većeg poluprečnika r_2 , ima centar u tački R . Najpre je nacrtana pomoćna kružnica sa centrom u tački R , poluprečnika $r = r_2 - r_1$. Zatim su konstruisane tangente m_1 i



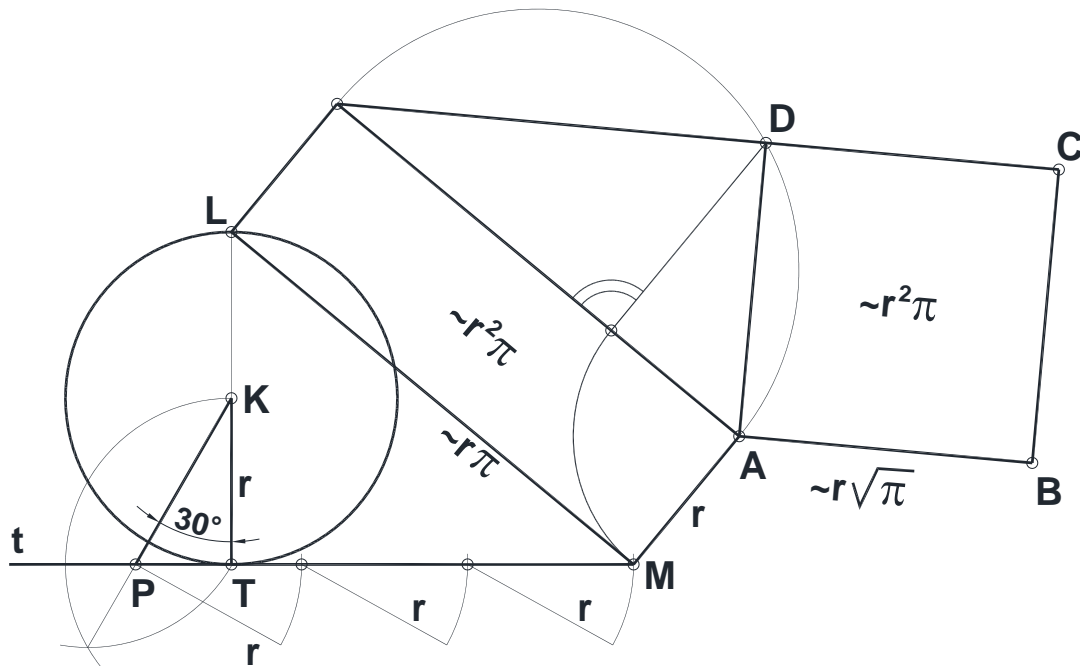
Slika D6-8

Konstrukcija zajedničkih tangenti na dve kružnice različitih poluprečnika

m_2 , iz tačke K na tu pomoćnu kružnicu, postupkom koji je već objašnjen i prikazan na slici D6-7 (kružnica prečnika KR seče pomoćnu kružnicu poluprečnika $r=r_2-r_1$ u tačkama P i Q , čime su definisane tangente $m_1=KP$ i $m_2=KQ$.) Uočeni su poluprečnici KA i KC ($KA \perp m_1$, $KC \perp m_2$), kao i poluprečnici RB i RD ($RB \perp m_1$, $RD \perp m_2$). Tangente $t_1=AB$ i $t_2=CD$ su tražene, zajedničke tangenti na dve zadate kružnice poluprečnika r_1 i r_2 .

7. PRIBLIŽNE REKTIFIKACIJE KRUŽNICE I KRUŽNOG LUKA

Pod pojmom rektifikacija krive linije podrazumeva se njeno ispravljanje odnosno, određivanje dužine te krive. Rektifikacija kružnice, tj. izračunavanje njenog obima " $2r\pi$ ", kao i kvadratura kruga " $r^2\pi$ " ne mogu se izvršiti apsolutno tačno, niti numeričkim, niti geometrijskim sredstvima, jer je konstanta π transcendentan broj. Zato su moguće samo približne rektifikacije i kvadrature, sa ograničenom tačnošću. Najviše se koriste za razvijanje mreža površi konusnih i cilindričnih delova od lima. Na slici D7-1 prikazana je približna geometrijska rektifikacija kružnice po metodi Adama Kohanskog i približna kvadratura kruga, saglasno Euglidovim stavovima o srednjim geometrijskim proporcionalama u pravouglom trouglu.



Slika D7-1

Približna rektifikacija kružnice po Adamu Kohanskom i približna kvadratura kruga

Na kružnici poluprečnika r , čija se rektifikacija (dužina obima) traži, uočen je prečnik, na primer LT i u tački T nacrtana je tangenta t ove kružnice. Ne menjajući raspon šestara, koji je uvek jednak poluprečniku r , konstruisan je uz krak KT (polovljenjem ugla od 60°) ugao od 30° . Kao što je prikazano na slici D7-1, drugi krak ugla od 30° seče tangenta t u tački P . Od tačke P , duž tangente t , nanesen je tri puta poluprečnik r i dobijena je tačka M . Dužina LM približno je jednaka poluobimu $\sim r\pi$ ove kružnice. Da bi procenili grešku rektifikacije, odredićemo algebarski dužinu LM :

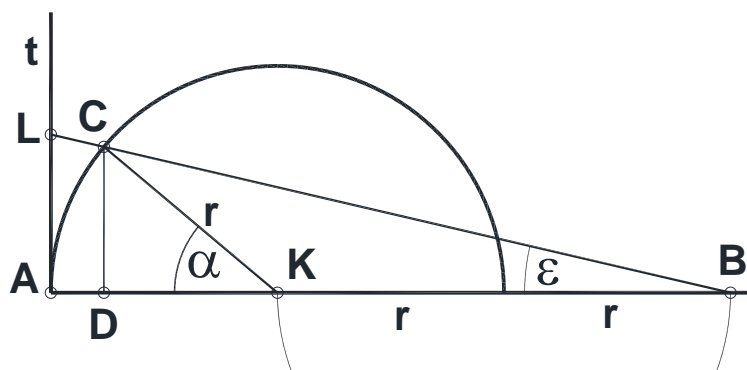
$$LM = \sqrt{(LT)^2 + (TM)^2} = \sqrt{(3r - r \tan 30^\circ)^2 + 4r^2} = r \sqrt{\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4};$$

$LM = r \sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}} = r \cdot 3,1415333387 \dots$; Dakle, rektifikacija Kohanskog približno određuje broj $\pi \approx 3,1415333 \dots$. U poređenju sa brojem π na sedam tačnih decimal $\pi=3.1415926\dots$, relativna greška ove aproksimacije manja je od $|\delta| < 1.9 \cdot 10^{-5}$. To praktično znači da će greška obima kružnice, na primer, poluprečnikar = 1000 mm, određena po ovoj metodi, biti manja od 0,12 mm.

Treba zapamtiti da je rektifikacija kružnice po metodi Adama Kohanskog jedna od najjednostavnijih, a u isti mah toliko visoke tačnosti da potpuno zadovoljava sve praktične primene.

Na slici D7-1, osim rektifikacije, prikazana je približna kvadratura kruga. Dužina $AD = r\sqrt{\pi}$ konstruisana je kao geometrijska sredina brojeva r i $r\pi$, i predstavlja stranicu kvadrata površine $r^2\pi$, tj. kvadrata čija je površina jednaka površini datog kruga poluprečnika r .

Na slici D7-2 prikazana je konstrukcija približne rektifikacije kružnog luka, po metodi Snel – Kuzanus (Willebrord van Royen Snell, Nicholas Cusanus). Da bi se izvršila rektifikacija odnosno, odredila dužina datog kružnog luka AC , sa centrom u tački K , poluprečnika r i ugaone mere α , najpre je uočena tangenta t na kružni luk u tački A . Zatim je duž prave AK , od tačke K nanesen prečnik $2r$ i dobijena tačka B . Zrak BC seče tangentu t u tački L . Dužina $p=AL$ približno je jednaka dužini kružnog luka AC . Da bi procenili grešku ove aproksimacije, odredićemo algebarski izraz za dužinu $p=AL$.



$$LA = AB \cdot \tan \varepsilon, \tan \varepsilon = \frac{CD}{DB}$$

$$CD = r \sin \alpha, DB = DK + KB,$$

$$DK = r \cdot \cos \alpha,$$

$$KB = 2r, AB = 3r,$$

Približna rektifikacija
kružnog luka AC
~ rektifikacija Snel-Kuzanus ~

$$p = LA = \frac{3 \sin \alpha}{2 + \cos \alpha} \cdot r$$

Slika D7-2

Približna rektifikacija kružnog luka po metodi
Snel - Kuzanus

U tablici T, prikazane su apsolutne greške $l-p$, relativne greške $(l-p)/l$ rektifikacije kružnih lukova poluprečnik $r=l$, za tri ugaone mere α .

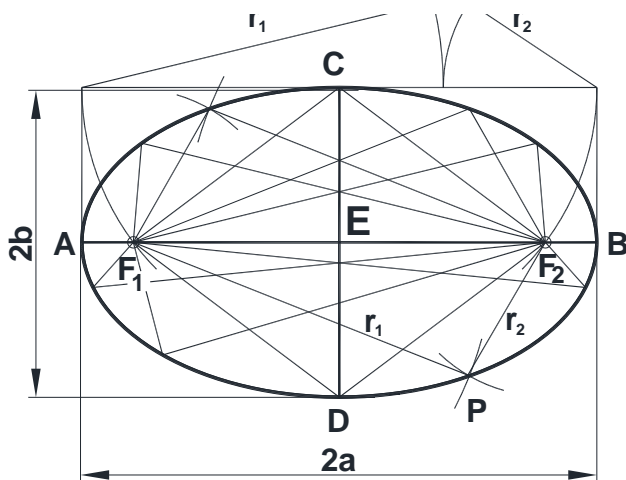
α	$l = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \cdot r$	$p = \frac{3 \sin \alpha}{2 + \cos \alpha} \cdot r$	$l - p$ manje od:	$(l - p)/l$ manje od:
10^0	0.1745329	0.1745320	0.000001	$5.2 \cdot 10^{-6}$
20^0	0.3490658	0.3490366	0.00003	$8.5 \cdot 10^{-5}$
30^0	0.5235988	0.5233729	0.00023	$4.5 \cdot 10^{-4}$

Tablica T

To praktično znači da će apsolutna greška određivanja dužine kružnog luka po opisanoj metodi Snel - Kuzanus biti manja od jednog stotog dela milimetra ($l-p < 0,01$ mm) za kružne lukove ugaone mere $\alpha=10^0$ čiji su poluprečnici $r < 10.000$ mm (10 m), ugaone mere $\alpha=20^0$ za $r < 333,33$ mm, ugaone mere $\alpha=30^0$ za $r < 43,47$ mm. Može se konstatovati da je i ova metoda rektifikacije jednostavna i u praksi vrlo primenljiva.

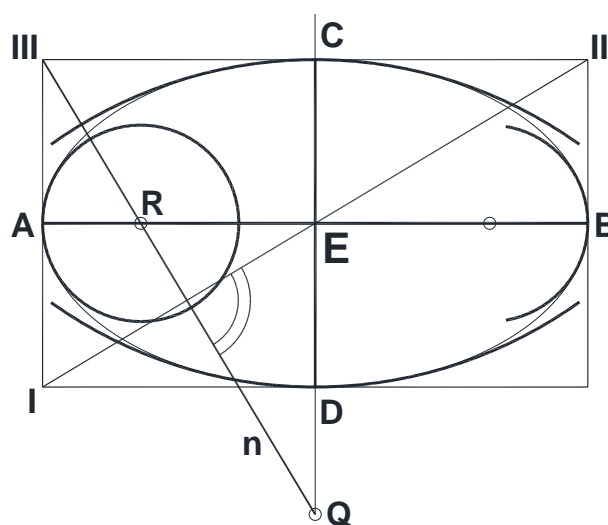
8. KONSTRUKCIJE ELIPSE

Elipsa je ravanska kriva drugog reda sa osobinom da je zbir rastojanja ma koje njene tačke od dve stalne tačke F_1 i F_2 konstantan i jednak velikoj osi $2a$. Tačke F_1 i F_2 zovu se žiže ili fokusi elipse. Iz ove definicije proishode konstrukcije prikazane na slici D8-1. Pre svega, ako su poznate žiže i velika osa elipse, mala osa b dobija se kao kateta EC pravouglog trougla ΔF_1EC , u kome je hipotenuza $F_1C=a$. Ako su poznate i velika i mala poluosa, žiže elipse F_1 i F_2 dobijaju se na preseku pravca velike poluose sa kružnim lukom poluprečnika $r=a$, sa centrom u temenu C ili D . Proizvoljna tačka P elipse konstruiše se (slika D8-1) kao presek dva kružna luka sa centrima u žižama, poluprečnika $r_1=l$, $0<l<2a$ i $r_2=2a-l$. Kako elipsa ima dve ortogonalne ose simetrije, jedan izabrani par radijusa r_1 i r_2 određuje ukupno četiri tačke elipse odnosno, dva ortogonalno simetrična para tačaka elipse.



Slika D8-1

Konstrukcija elipse po definiciji $r_1+r_2=2a$



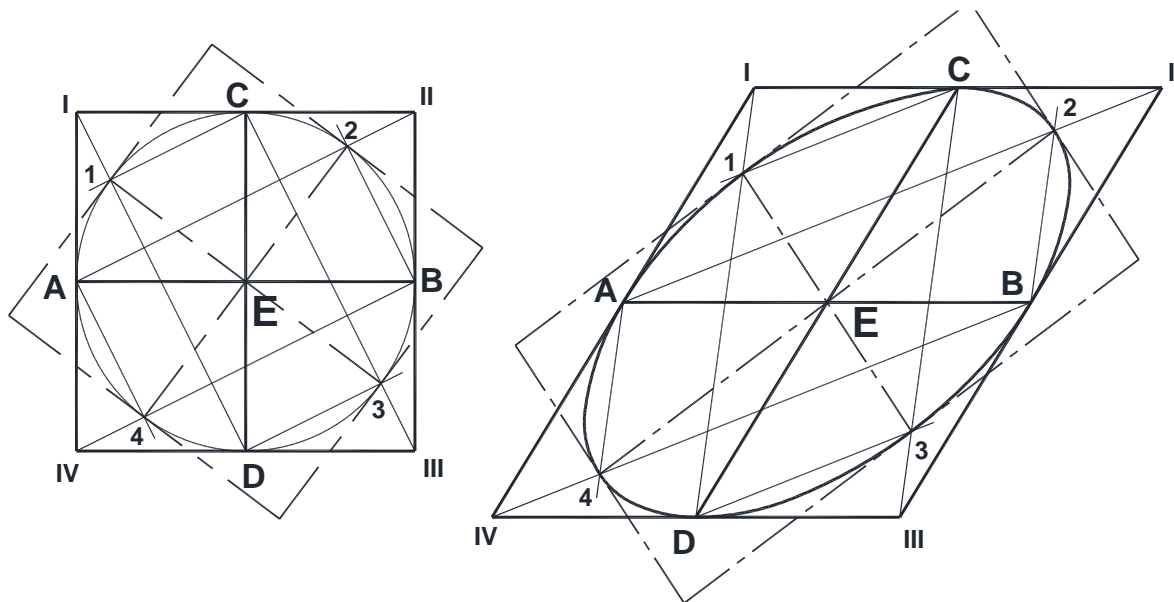
Slika D8-2

Lukovi kružnica zakrivljenosti u temenima elipse

Na slici D8-2 prikazana je pomoćna konstrukcija elipse, ako je poznate njena velika i mala osa. Ona se zasniva na korišćenju temenih oskulatornih kružnica odnosno, lukova kružnica zakrivljenosti u temenima elipse. U temenima A , B , C i D uočene su tangent elipse i formiran je tangencijalni pravougaonik. Prava n , koja sadrži teme III , a ortogonalna je na dijagonali $I-II$ ovog tangencijalnog pravougaonika, seče veliku osu elipse u tački R , a pravac male ose u tački Q . Tačka R centar je krivine za teme A , sa poluprečnikom krivine $r=RA=b^2/a$, a tačka Q centar je krivine za teme C ove elipse, sa poluprečnikom krivine $r=QC=a^2/b$. Centri krivina za temena B i D ortogonalno su simetrični centrima R i Q , u odnosu na odgovarajuće ose elipse. Kao što je prikazano na slici D8-2, lukovi kružnica zakrivljenosti olakšavaju skiciranje elipse. Treba zapaziti i, pri skiciranju elipse, uvažiti činjenicu da kružnicu krivine većeg prečnika elipsa dodiruje sa unutrašnje strane, a onu manjeg prečnika sa spoljašnje strane.

Na slici D8-3 prikazano je konstruisanje elipse po metodi “8 tačaka i 8 tangenti”, koja potiče od profesora dr Milorada Jovičića. Izvedena je kosim projiciranjem odnosno, afinim preslikavanjem kruga i može se primeniti uvek kada je elipsa definisana bilo kojim parom spregnutih prečnika. (Dva prečnika elipse su spregnuta ili konjugovana ako su tangente na krajevima jednog paralelne sa drugim prečnikom, a tangent na krajevima drugog paralelne sa prvim prečnikom.)

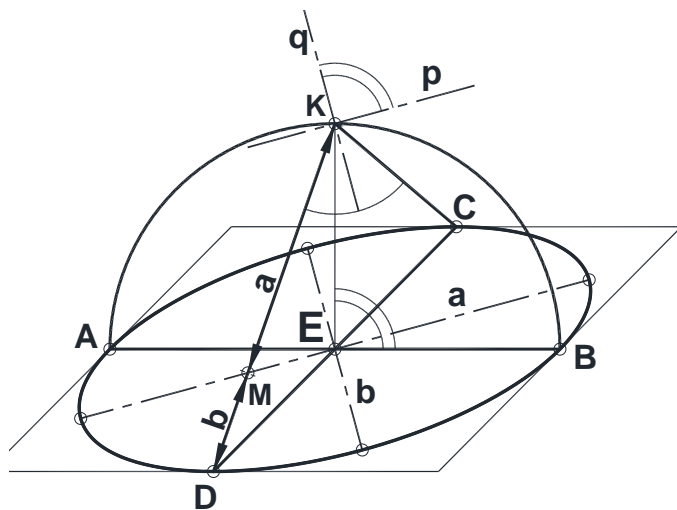
Kao što je prikazano na slici D8-3, uočavanjem tangenti na krajevima zadanog para spregnutih prečnika AB i CD formiran je tangencijalni paralelogram $I-II-III-IV$. Postavljene su prave u tačkama A i B , paralelno dužima $I-D$ i $C-III$, a u tačkama C i D , paralelno dužima $A-II$ i $IV-B$. Njihovim preseccima definisane su četiri nove tačke elipse: $1, 2, 3$ i 4 odnosno, dva nova para spregnutih prečnika elipse $1-3$ i $2-4$. Tangente u tačkama 1 i 3 paralelne su prečniku $2-4$, a tangent u tačkama 2 i 4 paralelne su prečniku $1-2$. Korišćenjem posojećih 8 tačaka i 8 tangenti moguće je korektno skicirati elipsu.



Slika 8-3

Konstrukcija elipse metodom "8 tačaka i 8 tangenti"

Na slici D8-4 data je konstrukcija velike a i male ose b elipse na osnovu zadanog para njenih spregnutih prečnika AB i CD . Konstrukcija potiče takođe od dr Milorada Jovičića. Nad većim prečnikom AB opisana je polovina kružnice i uočen je njen poluprečnik $EK \perp AB$. Ova kružnica



Slika D8-4

Konstrukcija velike i male ose elipse na osnovu zadanog para spregnutih prečnika

se na dva načina koso projektuje (afino preslikava) u datu elipsu: zracima paralelnim sa KC ili zracima paralelnim sa KD . Simetrala q ugla $\angle DKC$ i prava $p \perp q$ definišu veliku i malu osu elipse po pravcu. Ovi pravci, paralelno pravama p i q , postavljeni su u centru elipse E . Kao što je prikazano na slici D8-4, pravac velike poluose kroz centar elipse E seče zrak KD u tački M . $KM=a$ je velika poluosa, a $MD=b$ je mala poluosa elipse. Ove veličine prenesene su na pravce velike i male ose elipse, čime je omogućeno konstruisanje tačaka elipse po definiciji, kao i određivanje lukova kružnica zakrivljenosti u temenima ove krive drugog reda.