

## Други колоквијум из Математике 2 - решења

1. За  $x = 3(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2})$ ,  $y = -3 \sin t$  је:

$$\begin{aligned}x'(t) &= 3 \left( -\sin t + \frac{1}{\frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right) = 3 \left( -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right), \\y'(t) &= -3 \cos t,\end{aligned}$$

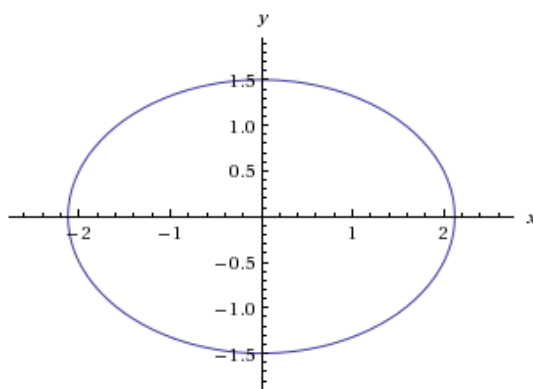
па је тражена дужина лука:

$$\begin{aligned}L &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left( 3 \left( -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right) \right)^2 + (-3 \cos t)^2} dt = 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t - 2 + \frac{1}{\sin^2 t} + \cos^2 t} dt \\&= 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} dt = 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg}^2 t} dt = 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} |\operatorname{ctg} t| dt = 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} t dt.\end{aligned}$$

Уводећи смену  $\sin t = u$ ,  $\cos t dt = du$ ,  $t = \frac{\pi}{6}$  за  $u = \frac{1}{2}$  и  $t = \frac{\pi}{2}$  за  $u = 1$  добијамо:

$$L = 3 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{du}{u} = 3(\ln |u|) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 3 \left( \ln 1 - \ln \frac{1}{2} \right) = 3(-\ln 2^{-1}) = 3 \ln 2.$$

2. Једначина елипсе  $2x^2 + 4y^2 = 9$  у канонском облику је  $\frac{x^2}{(\frac{3}{\sqrt{2}})^2} + \frac{y^2}{(\frac{3}{2})^2} = 1$  (слика).



Обртна површ (елипсоид) настаје ротацијом горње полуелипсе чија је једначина

$y = \frac{\sqrt{9-2x^2}}{2}$  око  $x$ -осе,  $-3/\sqrt{2} \leq x \leq 3/\sqrt{2}$ . Како је

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-2x^2}} \quad \text{и} \quad 1 + y'^2(x) = \frac{9-x^2}{9-2x^2},$$

и крива је симетрична у односу на  $y$ -осу, тражена површина је

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^{3/\sqrt{2}} \frac{\sqrt{9-2x^2}}{2} \sqrt{\frac{9-x^2}{9-2x^2}} dx = 2\pi \int_0^{3/\sqrt{2}} \sqrt{9-x^2} dx.$$

Уводећи смену  $x = 3 \sin t$ ,  $dx = 3 \cos t dt$ ,  $x = 0$  за  $t = 0$  и  $x = 3/\sqrt{2}$  за  $t = \frac{\pi}{4}$  добијамо

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \sqrt{9-9\sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt = 2\pi \cdot 9 \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt = 9\pi \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 9\pi \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{9\pi^2}{4} + \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. Ако уведемо ознаке  $p = \frac{z}{y}$  и  $q = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}$ , тада је:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{z}{y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2 - z^2}{y^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{2z}{y}.$$

Из  $u = f(p, q)$ ,  $p = p(x, y, z)$ ,  $q = q(x, y, z)$  даље рачунамо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{2x}{y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{-z}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{y^2 - x^2 - z^2}{y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{2z}{y}, \end{aligned}$$

одакле је:

$$\begin{aligned} &(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} + 2xz \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= (x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{2x}{y} + 2xy \left( \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{-z}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{y^2 - x^2 - z^2}{y^2} \right) + 2xz \left( \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{2z}{y} \right) \\ &= \left( -\frac{2xz}{y} + \frac{2xz}{y} \right) \frac{\partial f}{\partial p} + \left( \frac{2x}{y} (x^2 - y^2 - z^2) + \frac{2x}{y} (y^2 - x^2 - z^2) + \frac{4xz^2}{y} \right) \frac{\partial f}{\partial q} = 0. \end{aligned}$$

4. Диференцирањем функције  $z(x, y) = (x^2 - 2y^2)e^{-2x-2y}$  по  $x$  и  $y$  добијамо:

$$\begin{aligned} z'_x &= 2e^{-2x-2y}(x - x^2 + 2y^2), \\ z'_y &= 2e^{-2x-2y}(-2y - x^2 + 2y^2). \end{aligned}$$

Решавањем система  $z'_x = 0$ ,  $z'_y = 0$  налазимо да функција има две стационарне тачке:  $M_1(0, 0)$  и  $M_2(2, -1)$ . Треба проверити да ли је у тим тачкама локални екстремум, па налазимо друге парцијалне изводе:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 2e^{-2x-2y}(1 - 4x + 2x^2 - 4y^2), \\ z''_{xy} &= 2e^{-2x-2y}(-2x + 4y + 2x^2 - 4y^2), \\ z''_{yy} &= 2e^{-2x-2y}(-2 + 8y + 2x^2 - 4y^2). \end{aligned}$$

У тачки  $M_1$  је  $A = z''_{xx} = 2$ ,  $B = z''_{xy} = 0$  и  $C = z''_{yy} = -4$ , па је  $\Delta = AC - B^2 = -8 < 0$  и ту функција нема екстремум.

У тачки  $M_2$  је  $A = -\frac{6}{e^2}$ ,  $B = -\frac{8}{e^2}$  и  $C = -\frac{12}{e^2}$ , па је  $\Delta = \frac{8}{e^4} > 0$  и како је  $A < 0$ ,  $M_2$  је тачка локалног максимума,  $z(M_2) = \frac{2}{e^2}$ .

5. Напишимо дату једначину у облику  $y' = -\frac{4x + 3y + 1}{x + y + 1}$ . Сменама  $x = X + \alpha$ ,  $y = Y + \beta$  за одговарајуће  $\alpha$  и  $\beta$ , ова једначина се своди на хомогену. У једначини

$$Y' = -\frac{4X + 4\alpha + 3Y + 3\beta + 1}{X + \alpha + Y + \beta + 1}$$

бирамо  $\alpha$  и  $\beta$  тако да важи

$$4\alpha + 3\beta + 1 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha + \beta + 1 = 0.$$

Решење горњег система је  $\alpha = 2$  и  $\beta = -3$ , па полазна једначина постаје

$Y' = -\frac{4X + 3Y}{X + Y}$ , тј.  $Y' = -\frac{4 + 3\frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$ . Сменом  $z = \frac{Y}{X}$ , одакле је  $Y' = z'X + z$ , добијамо

$$z'X + z = -\frac{4 + 3z}{1 + z}, \quad \text{односно} \quad -\frac{1 + z}{(2 + z)^2}dz = \frac{dX}{X}, \quad \text{одакле је}$$

$$-\int \frac{2 + z - 1}{(2 + z)^2}dz = \int \frac{dX}{X}, \quad \text{односно} \quad -\ln|2 + z| - \frac{1}{2 + z} + C = \ln|X|.$$

Дакле, опште решење хомогене једначине је

$$-\frac{1}{2 + \frac{Y}{X}} + C = \ln \left| X \left( 2 + \frac{Y}{X} \right) \right|, \quad \text{тј.} \quad C_1 e^{-\frac{X}{2X+Y}} = 2X + Y,$$

а опште решење полазне једначине је

$$C_1 e^{\frac{2-x}{2x+y-1}} = 2x + y - 1.$$