Математика 3 - јулски рок

8.7.2017. – група А

1. Решити диференцијалну једначину $y'' - 2y' \operatorname{tg} x - 2y = 1$. Није забрањено користити смену $z = y \cos x$.
2. Одредити константу α за коју криволинијски интеграл $\int_\gamma (x^2dx + y^2dy + z^2dz)(x^3+y^3+z^3)^\alpha$ не зависи од пута, где је γ било која крива од тачке $A(-1,0,1)$ до тачке $B(3,4,5)$.
3. Наћи површину површи S дате једначином $z = (x-y)^{3/2}$, $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$.
4. Израчунати интеграл $\iint_{\Pi^-} (e^y + xyz)dydz + (e^z + xyz)dzdx + (e^x + xyz)dxdy$, где је Π^- унутрашња страна сфере $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$.

Математика 3 - јулски рок

8.7.2017. – група Б

1. Решити диференцијалну једначину $y'' - 2y' \operatorname{tg} x - 2y = 2$. Није забрањено користити смену $z = y \cos x$.
2. Одредити константу α за коју криволинијски интеграл $\int_\gamma (x^3dx + y^3dy + z^3dz)(x^4+y^4+z^4)^\alpha$ не зависи од пута, где је γ било која крива од тачке $A(-1,0,1)$ до тачке $B(3,4,5)$.
3. Наћи површину површи S дате једначином $z = \frac{1}{2}(x-y)^{3/2}$, $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 4$.
4. Израчунати интеграл $\iint_{\Pi^-} (e^z + xyz)dydz + (e^x + xyz)dzdx + (e^y + xyz)dxdy$, где је Π^- унутрашња страна сфере $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Кратка решења

не тврдим да су безгрешна

1. Користићемо оно што није забрањено: ако је $y = \frac{z}{\cos x}$, онда је $y' = \frac{z'\cos x + z \sin x}{\cos^2 x}$ и (проверите!) $y'' = \frac{z''\cos^2 x + 2z'\cos x \sin x + z(2-\cos^2 x)}{\cos^3 x}$. Тако једначина $y'' - 2y' \operatorname{tg} x - 2y = 1$ након сређивања (испишите, па се уверите!) постаје линеарна са константним коефицијентима: $z'' - z = \cos x$.

   Група А. Партикуларно решење је $z_p = -\frac{1}{2}\cos x$, хомогено је $z_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$, па тако добијамо $z = z_p + z_h$ и $y = \frac{z}{\cos x} = -\frac{1}{2} + C_1 \cdot \frac{e^x}{\cos x} + C_2 \cdot \frac{e^{-x}}{\cos x}$.

   Група Б. Овде је $z_p = -\cos x$, те је $y == -1 + C_1 \cdot \frac{e^x}{\cos x} + C_2 \cdot \frac{e^{-x}}{\cos x}$.

2. Чуо сам да "овако нешто нисте никад видели". Значи да нисте никад видели секцију 6.3 у уџбенику. Ево да запамтите: *криволинијски интеграл* $\int_C Pdx + Qdy + Rdz$ *не зависи од пута ако и само ако је ротор векторског поља* (P,Q,R) *једнак нули.*

   Група Б. У нашем случају је $P = x^3(x^4+y^4+z^4)^\alpha$, $Q = y^3(x^4+y^4+z^4)^\alpha$ и $R = z^3(x^4+y^4+z^4)^\alpha$. Сада рачунамо $\operatorname{rot}(P,Q,R) = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$ и налазимо $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 4\alpha y^3z^3(x^4+y^4+z^4)^{\alpha-1} - 4\alpha y^3z^3(x^4+y^4+z^4)^{\alpha-1} = 0$ итд, дакле $\operatorname{rot}(P,Q,R) = \vec{0}$ за све α.

   Одговор је: *свако* α.

   Група А. На исти начин: *свако* α.

3. _Група А._ Означимо са D област дату условима $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$. Површина дате површи је $P = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$, при чему је $z_x = \frac{3}{2}(x-y)^{1/2}$ и $z_y = -\frac{3}{2}(x-y)^{1/2}$. Следи да је $P = \iint_D \sqrt{1 + \frac{9}{2}(x-y)}dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{2}(x-y)}dy = \left\{\begin{matrix} t = 1 + \frac{9}{2}(x-y) \\ dt = -\frac{9}{2}dy \end{matrix}\right\} = \frac{2}{9}\int_0^1 dx \int_1^{1+\frac{9}{2}x} \sqrt{t}dt = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3}\int_0^1 \left(t^{3/2}\Big|_1^{1+\frac{9}{2}x}\right)dx = \frac{4}{27}\int_0^1 \left((1+\frac{9}{2}x)^{3/2} - 1\right)dx = \left\{\begin{matrix} u = 1 + \frac{9}{2}x \\ du = -\frac{9}{2}dx \end{matrix}\right\} = \frac{8}{243}\int_1^{11/2}\left(u^{3/2} - 1\right)du = \cdots = \frac{8}{243}\left(\frac{2}{5}(\frac{11}{2})^{5/2} - \frac{49}{10}\right) \approx 0,7729$.

   Група Б. Површ је увећана 4 пута у односу на групу А и има 16 пута већу површину: $P = \frac{128}{243}\left(\frac{2}{5}(\frac{11}{2})^{5/2} - \frac{49}{10}\right) \approx 12,3665$.

4. *Група Б.* Пошто теорема Гаус-Остроградског важи за интеграл по спољној страни површи Π^+, а $\iint_{\Pi^-} = -\iint_{\Pi^+}$, имамо $I = \iint_{\Pi^-}(e^z + xyz)dydz + (e^x + xyz)dzdx + (e^y + xyz)dxdy = -\iiint_V (yz + zx + xy)dxdydz$, где је V унутрашњост сфере. У сферним координатама је $x = 1 + \sin\theta\cos\varphi$, $y = 1 + \sin\theta\sin\varphi$ и $z = 1 + \cos\theta$, па је $I = -\int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} [3 + 2\cos\theta + (2\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)(\cos\varphi + \sin\varphi) + \sin^2\theta \sin\varphi\cos\varphi]d\varphi = -\int_0^1 dr \int_0^\pi 2\pi(3 + 2\cos\theta)d\theta = -3\pi^2$.

   Група А. Све је слично и опет је одговор $-3\pi^2$.