

Prvi kolokvijum iz Matematike 3

1. Naći diferencijalnu jednačinu čije je opšte rešenje dato sa

$$y = (C_2x - 1) + C_1(x - 1)^2.$$

Rešenje. Formiramo funkciju $F = y - (C_2x - 1) - C_1(x - 1)^2 = 0$ i tražimo njene izvode. Nalazimo

$$\begin{aligned} F &= y - (C_2x - 1) - C_1(x - 1)^2 = 0, \\ F' &= y' - C_2 - 2C_1(x - 1) = 0, \\ F'' &= y'' - 2C_1 = 0. \end{aligned}$$

Nalazimo $C_1 = y''/2$, $C_2 = y' - y''(x - 1)$, i

$$0 = y - ((y' - y''(x - 1))x - 1) - \frac{y''}{2}(x - 1)^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 1)y'' - xy' + y + 1.$$

2. Odrediti opšte rešenje linearne homogene diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$y'''' + y''' - 3y'' - y' + 2y = 0.$$

Rešenje. Karakteristični polinom i karakteristična jednačina glase

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Kako je ovo jednačina četvrtog stepena, pokušajmo naći racionalna rešenja. Delioći koeficijenta uz λ^4 su ± 1 , dok su delioći koeficijenta u $\lambda^0 \pm 1, \pm 2$. Moguće racionalne nule su ± 1 i ± 2 . Nalazimo

$$p(1) = 0, \quad p(-1) = 0, \quad p(2) = 12, \quad p(-2) = 0.$$

Potrebno je polinom p podeliti faktorima. Nalazimo

$$\begin{array}{r} \lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 2 : \lambda - 1 = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 \\ \underline{\lambda^4 - \lambda^3} \\ 2\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 2 \\ \underline{2\lambda^3 - 2\lambda^2} \\ -\lambda^2 - \lambda + 2 \\ \underline{-\lambda^2 + \lambda} \\ -2\lambda + 2 \\ \underline{-2\lambda + 2} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 : \lambda + 1 = \lambda^2 + \lambda - 2 \\ \underline{\lambda^3 + \lambda^2} \\ \lambda^2 - \lambda - 2 \\ \underline{\lambda^2 + \lambda} \\ -2\lambda - 2 \\ \underline{-2\lambda - 2} \\ 0 \end{array}$$

Kako je $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$ dobijamo $p(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$. Nule polinoma p su $-2, -1, 1$ i 1 . Odavde dobijamo homogeno rešenje

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + (C_3 + xC_4)e^x.$$

3. Odrediti opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x.$$

Rešenje. Homogeno rešenje dobijamo jednostavno. Nule karakterističnog polinoma $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$ su $-1 \pm i$. Odavde nalazimo homogeno rešenje

$$y_h = C_1 e^{(-1+i)x} + C_2 e^{(-1-i)x} = e^{-x}(D_1 \cos x + D_2 \sin x).$$

Kako je pobuda sistema linearna kombinacija funkcija $e^{(-1+i)x}$ i $e^{(-1-i)x}$, ispunjeni su uslovi nastanka rezonancije. Tako da partikularno rešenje tražimo u obliku

$$y_p = xe^{-x}((ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x).$$

Nalazimo

$$\begin{aligned} 2y &= 2xe^{-x}((ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x), \\ 2y' &= -2e^{-x}((ax^2 + bx) \cos x + (cx^2 + dx) \sin x) \\ &\quad + e^{-x}((cx^2 + (d + 2a)x + b) \cos x + (-ax^2 + (-b + 2c)x + d) \sin x) \\ &= -2e^{-x}(((-a + c)x^2 + (d + 2a - b)x + b) \cos x + ((-a - c)x^2 + (-b + 2c - d)x + d) \sin x) \\ y'' &= e^{-x}(((-a + c)x^2 + (d + 2a - b)x + b) \cos x + ((-a - c)x^2 + (-b + 2c - d)x + d) \sin x) \\ &\quad - e^{-x} [((-a - c)x^2 + (-2a + 4c - b - d)x + 2d + 2a - b) \cos x \\ &\quad + ((a - c)x^2 + (-4a - 2c + b - d)x - 2b + 2c - d) \sin x] \\ &= e^{-x} [(-2cx^2 + (-4a + 4c - 2d)x + 2a - 2b + 2d) \cos x \\ &\quad + (2ax^2 + (-4a + 2b - 4c)x - 2b + 2c - 2d) \sin x] \\ y'' + 2y' + 2y &= e^{-x}((4cx + 2a + 2d) \cos x + (-4ax - 2b + 2c) \sin x) \end{aligned}$$

Odavde dobijamo sistem jednačina

$$4c = 1, \quad 2a + 2d = 0, \quad -4a = 0, \quad -2b + 2c = -1.$$

Rešenje sistema jednačina je $a = 0, b = 3/4, c = 1/4, d = 0$.

Kombinacijom nalazimo rešenje jednačine

$$y = y_h + y_p = e^{-x}(D_1 \cos x + D_2 \sin x) + xe^{-x} \left(\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} x \sin x \right).$$

4. Odrediti opšte rešenje sistema linearnih diferencijalnih jednačina

$$x' = 2y, \quad y' = 2x.$$

Rešenje. Jednačinu napišemo u matričnom obliku

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}' = A\vec{x}.$$

Karakteristični polinom matrice A je

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4.$$

Nule karakterističnog polinoma (sopstvene vrednosti matrice A) su ± 2 .

Sopstveni vektor $\vec{A}_1$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti 2 je određen sistemom jednačina

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Dobijamo dve jednačine $-2a_1 + 2a_2 = 0$ i $2a_1 - 2a_2 = 0$. Rešenje jednačina je $a_1 = a_2 = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Sopstveni vektor $\vec{A}_2$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti -2 je određen sa

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Dobijamo dve jednačine $2a_1 + 2a_2 = 0$ i $2a_1 + 2a_2 = 0$. Rešenje je $a_1 = -a_2 = C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Opšte rešenje glasi

$$y = C_1 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Prvi kolokvijum iz Matematike 3

1. Naći diferencijalnu jednačinu čije je opšte rešenje dato sa

$$y = (C_2x + 1)^2 + C_1x.$$

Rešenje. Formiramo funkciju $F = y - (C_2x + 1)^2 + C_1x = 0$, i nadjemo izvode

$$\begin{aligned} F &= y - (C_2x + 1)^2 + C_1x = 0, \\ F' &= y' - 2C_2(C_2x + 1) + C_1 = 0, \\ F'' &= y'' - 2C_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Odavde nalazimo $C_2 = \sqrt{y''/2}$, $C_1 = y' - xy'' - \sqrt{2y''}$. Zamenom u prvu jednačinu nalazimo

$$0 = y - \left(x\sqrt{\frac{y''}{2}} + 1\right)^2 - (y' - xy'' - \sqrt{2y''})x = \frac{1}{2}x^2y'' - xy' + y - 1.$$

2. Odrediti opšte rešenje linearne homogene diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$y'''' + 3y''' + y'' - 3y' - 2y = 0.$$

Rešenje. Karakteristični polinom i karakteristična jednačina su određeni sa

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0.$$

Kako je ovo jednačina četvrtog stepena, probajmo naći racionalna rešenja. Koeficijent u λ^4 ima delioce ± 1 , koeficijent λ^0 ima delioce ± 1 i ± 2 . Odavde nalazimo moguća racionalna rešenja ± 1 i ± 2 . Nalazimo

$$p(-1) = 0, \quad p(1) = 0, \quad p(2) = 36, \quad p(-2) = 0.$$

Potrebno je podeliti polinom p linearnim faktorima.

$$\begin{array}{r} \lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda - 2 : \lambda - 1 = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 \\ \underline{\lambda^4 - \lambda^3} \\ 4\lambda^3 + \lambda^2 - 3\lambda - 2 \\ \underline{4\lambda^3 - 4\lambda^2} \\ 5\lambda^2 - 3\lambda - 2 \\ \underline{5\lambda^2 - 5\lambda} \\ 2\lambda - 2 \\ \underline{2\lambda - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 : \lambda + 1 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ \underline{\lambda^3 + \lambda^2} \\ 3\lambda^2 + 5\lambda + 2 \\ \underline{3\lambda^2 + 3\lambda} \\ 2\lambda + 2 \\ \underline{2\lambda + 2} \\ 0 \end{array}$$

Kako je $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, nalazimo

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)^2(\lambda - 1).$$

Na osnovu faktorizacije karakterističnog polinoma nalazimo rešenje

$$y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + xC_3)e^{-x} + C_4 e^x.$$

3. Odrediti opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

$$y'' - 2y' + 2y = (x + 1)e^x \cos x - e^x \sin x.$$

Rešenje. Kako su nule karakterističnog polinoma $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ određene sa $1 \pm i$, nalazimo rešenje homogene jednačine

$$y_h = C_1 e^{(1+i)x} + C_2 e^{(1-i)x} = e^x (D_1 \cos x + D_2 \sin x).$$

Kako je pobuda linearna kombinacija funkcija $e^{(1+i)x}$ i $e^{(1-i)x}$ partikularno rešenje nalazimo u obliku

$$y_p = x e^x ((ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x).$$

Dobijamo

$$\begin{aligned} 2y &= 2e^x ((ax^2 + bx) \cos x + (cx^2 + dx) \sin x), \\ -2y' &= -2e^x ((ax^2 + bx) \cos x + (cx^2 + dx) \sin x) \\ &\quad - 2e^x ((cx^2 + (2a + d)x + b) \cos x + (-ax^2 + (-b + 2c)x + d) \sin x), \\ &= -2e^x (((a + c)x^2 + (2a + b + d)x + b) \cos x + ((-a + c)x^2 + (-b + 2c + d)x + d) \sin x) \\ y'' &= e^x (((a + c)x^2 + (2a + b + d)x + b) \cos x + ((-a + c)x^2 + (-b + 2c + d)x + d) \sin x) \\ &\quad + e^x [((-a + c)x^2 + (2a - b + 4c + d)x + 2a + b + 2d) \cos x \\ &\quad + ((-a - c)x^2 + (-4a - b + 2c - d)x - b + 2c + d) \sin x] \\ &= e^x [2cx^2 + (4a + 4c + 2d)x + 2a + 2b + 2d) \cos x \\ &\quad + (-2ax^2 + (-4a - 2b + 4c)x - 2b + 2c + 2d) \sin x] \\ y'' - 2y' + 2y &= e^x ((4cx + 2a + 2d) \cos x + (-4ax - 2b + 2c) \sin x). \end{aligned}$$

Oдавде dobijamo sistem jednačina

$$4c = 1, \quad 2a + 2d = 1, \quad -4a = 0 \quad -2b + 2c = -1.$$

Rešenje sistema je $a = 0$, $b = 3/4$, $c = 1/4$, $d = 1/2$.

Na osnovu prethodnih izračunavanja nalazimo opšte rešenje

$$y = y_h + y_p = e^x (D_1 \cos x + D_2 \sin x) + x e^x \left(\frac{3}{4} \cos x + \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right) \sin x \right).$$

4. Odrediti opšte rešenje sistema linearnih diferencijalnih jednačina

$$x' = 3y, \quad y' = 3x.$$

Rešenje. Sistem zapišemo u matričnom obliku

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}' = A\vec{x}.$$

Karakteristični polinom matrice A je

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9.$$

Nule karakterističnog polinoma (sopstvene vrednosti matrice A) su ± 3 .

Sopstveni vektor $\vec{A}_1$ pridružen sopstvenoj vrednosti 3 je određen sistemom jednačina

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0..$$

Dobijamo sistem od dve jednačine $-3a_1 + 3a_2 = 0$ i $3a_1 - 3a_2 = 0$. Rešenje je $a_1 = a_2 = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Sopstveni vektor $\vec{A}_2$ pridružen sopstvenoj vrednosti -3 iznosi

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Dobijamo sistem jednačina $3a_1 + 3a_2 = 0$ i $3a_1 + 3a_2 = 0$. Rešenje je $a_1 = -a_2 = C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Rešenje sistema je

$$y = C_1 e^{3x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-3x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$