

Granične vrednosti funkcija

1. Naći granične vrednosti funkcija:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 4x + 8}{x^3 + 2x - 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x^2 - 4x + 8) : x^3}{(x^3 + 2x - 6) : x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5/x - 4/x^2 + 8/x^3}{1 + 2/x^2 - 6/x^3} = 0, \\ \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x - 1}{3x^2 + 8x - 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^4 + x - 1) : x^2}{(3x^2 + 8x - 2) : x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1/x - 1/x^2}{3 + 8/x - 2/x^2} = +\infty, \\ \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{3x^3 - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^3 - 3x + 1) : x^3}{(3x^3 - 2x^2) : x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3/x^2 + 1/x^3}{3 - 2/x} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. Naći granične vrednosti funkcija:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = -\frac{1}{2}, \\ \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} - \frac{1}{1-x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x + 2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = 1. \end{aligned}$$

Diferencijalni račun funkcije jedne promenljive

Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke x i neka je $\Delta x \in \mathbb{R}$ ($\Delta x \neq 0$) takav da tačka $x + \Delta x$ pripada posmatranoj okolini od x . Ako postoji konačna granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

onda kažemo da je funkcija f diferencijabilna u tački x , a taj limes zovemo izvodom funkcije f u tački x i označavamo ga sa $f'(x)$.

Primer: Naći po definiciji izvod funkcije $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x. \end{aligned}$$

Izvodi elementarnih funkcija

$$\begin{aligned} 1. (const.)' &= 0, & 2. (x^n)' &= nx^{n-1}, & 3. (a^x)' &= a^x \ln a, & 4. (e^x)' &= e^x, \\ 5. (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}, & 6. (\ln x)' &= \frac{1}{x}, & 7. (\sin x)' &= \cos x, & 8. (\cos x)' &= -\sin x, \\ 9. (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & 10. (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, & 11. (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ 12. (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & 13. (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & 14. (\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Osnovna pravila diferenciranja

Neka su $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne funkcije u x i $a \in \mathbb{R}$, tada je:

- a) $(af(x))' = af'(x)$,
- b) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
- c) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- d) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$.

3. Izračunati izvode sledećih funkcija:

- a) $(2e^x - \cos x + 5)' = 2e^x + \sin x$,
- b) $(x^5 \ln x)' = x^4(5 \ln x + 1)$,
- c) $(x \sin x - 2 \sin 2)' = \sin x + x \cos x$,
- d) $\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{2x}\right)' = \frac{x - (1 + x^2) \operatorname{arctg} x}{2x^2(1 + x^2)}$,
- e) $(\sin x \cdot \ln x \cdot \sqrt{x})' = \frac{2x \cos x \ln x + 2 \sin x + \ln x \sin x}{2\sqrt{x}}$.

Izvod složene funkcije

Neka su $y = f(u)$ i $u = u(x)$ diferencijabilne funkcije u odgovarajućim tačkama. Tada je

$$y'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

4. Izračunati izvode sledećih funkcija:

- a) $(\sin x^2)' = 2x \cos x^2$,
- b) $(\sin^2 x)' = \sin 2x$,
- c) $(\ln(\sin x + \cos x))' = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$,
- d) $\left(\operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

Izvodi višeg reda

$$y^{(0)} = y, \quad y^{(n+1)} = (y^{(n)})' \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

4. Naći prvi i drugi izvod funkcije:

- a) $y(x) = \frac{e^{x+1}}{x+2} \quad \left(y'(x) = e^{x+1} \frac{x+1}{(x+2)^2}, \quad y''(x) = e^{x+1} \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+2)^3}\right)$,
- b) $y(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \left(y'(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}, \quad y''(x) = \frac{11 - 6 \ln x}{x^4}\right)$.