

Prvi kolokvijum iz Numeričkih metoda,
I grupa

1. Pokazati primerom da postoji divergentan red $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sa osobinom $\lim a_k = 0$.

Rešenje. Jedan primer je harmonijski red $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/n$. Dokaz da divergira zasniiva se na sledećoj činjenici

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &\geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &\geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} &\geq \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{2^{n-1} + 1} + \frac{1}{2^{n-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^n} &\geq \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}, \\ S_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} &\geq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da važi $\lim S_{2^n} = +\infty$.

2. Koristeći Cauchyev kriterijum konvergencije ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{k + \cos(k\pi)}{k^{k+1} + 2}.$$

Rešenje. Dobijamo

$$\lim \left(\frac{1}{2^k} \frac{k + \cos(k\pi)}{k^{k+1} + 2} \right)^{1/k} = \frac{1}{2} \lim \frac{1}{k} \left(\frac{1 + \frac{\cos(k\pi)}{k}}{1 + \frac{2}{k^{k+1}}} \right)^{1/k} = 0 < 1,$$

odakle zaključujemo da je red konvergentan.

3. Koristeći Cauchyev integralni kriterijum dokazati da je red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{k^6 + 1}$$

konvergentan. Dati ocenu sume reda.

Rešenje. Posmatramo funkciju $f(x) = x^2/(x^6 + 1)$. Nalazimo da je funkcija neprekidna i pozitivna za $x > 0$. Takodje je

$$f'(x) = 2x \frac{1 - 2x^6}{(1 + x^6)^2},$$

zaključujemo da je $f'(x) < 0$ za $x > 2^{-1/6}$.

Kako je

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{3} \arctan x^3 \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12} < +\infty.$$

zaključujemo da je red $\sum k^2/(k^6 + 1)$ konvergentan.

Granice sume reda odredjujemo na osnovu vrednosti integrala

$$\frac{\pi}{12} = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{k^6 + 1} \leq \frac{1}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{12}.$$

4. Koristeći Weierstressov kriterijum uniformne konvergencije pokazati da je funkcionalni red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x^2 + \sin kx}{k^2 + x^2}$$

uniformno konvergentan na intervalu $[-5, 5]$.

Rešenje. Nalazimo

$$\left| \frac{2x^2 + \sin kx}{k^2 + x^2} \right| \leq \frac{2x^2 + |\sin kx|}{k^2 + x^2} \leq \frac{51}{k^2},$$

Kako je poslednji red konvergentan to je funkcionalni red uniformno konvergentan na intervalu $[-5, 5]$. Korislitli smo sledeće činjenice

$$|\sin x| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k^2 \leq k^2 + x^2 \Rightarrow \frac{1}{k^2 + x^2} \leq \frac{1}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x^2 \leq 5^2 = 25, \quad x \in [-5, 5].$$

5. Razviti u potencijalni red funkciju

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

koristeći identitet

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Odrediti poluprečnik konvergencije dobijenog potencijalnog reda.

Rešenje. Iz razvoja funkcije e^x , nalazimo

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}.$$

Dobijamo

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}.$$

Koristili smo činjenicu da potencijalni red uniformno konvergira, pa je moguće zameniti poredak operacija integracije i sumiranja.

Poluprečnik konvergencije ovako dobijenog reda iznosi

$$R^2 = \lim \left| \frac{(-1)^k \frac{1}{(2k+1)k!}}{(-1)^{k+1} \frac{1}{(2k+3)(k+1)!}} \right| = \lim \frac{(2k+3)(k+1)}{2k+1} = +\infty.$$

Naravno, poluprečnik konvergencije ostaje isti jer integracija i diferenciranje ne mogu promeniti poluprečnik konvergencije potencijalnog reda.

Prvi kolokvijum iz Numeričkih metoda,
II grupa

1. Neka je $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergentan red. Dokazati da je

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

Rešenje. Nalazimo

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n + S_{n-1}, \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1},$$

$$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0.$$

gde smo koristili činjenicu da je red $\sum a_k$ konvergentan.

2. Koristeći D'Alambertov kriterijum konvergencije ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{k + \cos(k\pi)}{(k+1)! + 2}.$$

Rešenje. Nalazimo

$$\lim \frac{\frac{1}{2^{k+1}} \frac{k+1+\cos(k+1)\pi}{(k+2)!+2}}{\frac{1}{2^k} \frac{k+\cos k\pi}{(k+1)!+2}} = \frac{1}{2} \lim \frac{1}{k+2} \frac{1 + \frac{1+\cos k\pi}{k}}{1 + \frac{\cos k\pi}{k}} \frac{1 + \frac{2}{(k+1)!}}{1 + \frac{2}{(k+2)!}} = 0 < 1,$$

zaključujemo da je red konvergentan.

3. Koristeći Liebnitzov kriterijum dokazati da je red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2+1}$$

konvergentan. Dati ocenu veličine R_{100} u formuli

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{100} (-1)^k \frac{k+1}{k^2+1} + R_{100}.$$

Rešenje. Opšti član reda je $a_k = (k+1)/(k^2+1)$. Funkcija $f(x) = (x+1)/(x^2+1)$, ima izvod $f'(x) = -(x^2+2x-1)/(x^2+1)^2$, zaključujemo da

je opadajuća za $x > \sqrt{2} - 1$. Takodje je $\lim a_k = 0$. Na osnovu Liebnitzove teoreme zaključujemo da je red konvergentan.

Ostatak R_{100} je manji od prvog zanemarenog člana i istog je znaka sa njim. Dakle $R_{100} \leq a_{101} = 102/10202$, znak ostatka je $(-1)^{101} = -1$.

4. Koristeći Weierstreissov kriterijum uniformne konvergencije pokazati da je funkcionalni red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x^2 + e^{-kx}}{k^2 + x^2}$$

uniformno konvergentan na intervalu $[0, 5]$.

Rešenje. Nalazimo

$$\left| \frac{2x^2 + e^{-kx}}{k^2 + x^2} \right| \leq \frac{51}{k^2},$$

kako je poslednji red konvergentan to je red uniformno konvergentan na intervalu $[0, 5]$. Koristili smo sledeće činjenice

$$e^{-kx} \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}, x \geq 0, \quad k^2 \leq k^2 + x^2 \Rightarrow \frac{1}{k^2 + x^2} \leq \frac{1}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x^2 \leq 25, \quad x \in [0, 5]$$

5. Razviti u potencijalni red funkciju

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

koristeći identitet

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Odrediti poluprečnik konvergencije dobijenog potencijalnog reda.

Rešenje. Na osnovu razvoja funkcije $\sin x$, nalazimo

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Sledi

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}.$$

Poluprečnik konvergencije dobijenog reda je

$$R^2 = \lim \left| \frac{(-1)^k \frac{1}{(2k+1)(2k+1)!}}{(-1)^{k+1} \frac{1}{(2k+3)(2k+3)!}} \right| = \lim \frac{(2k+3)(2k+3)(2k+2)}{2k+1} = +\infty.$$

Naravno, poluprečnik konvergencije ostaje isti jer se ne može promeniti integracijom ili diferenciranjem potencijalnog reda.