(e) Integracija linearnih homogenih diferencijalnih jedančina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Neka je data homogena diferencijalna jednačina drugog reda

$$(1) \qquad y''+a_1y'+a_2y=0,$$

gde su a_1, a_2 poznate konstante. Pokazaćemo da je ovu jednačinu uvek moguće prointegraliti, tj. doći do opšteg rešenja, samo pomoću elementarnih funkcija. Iz prethodno pokazanih teorema sledi da je opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima moguće dobiti tako što ćemo prvo odrediti dva partikularna integrala, posmatrane jendačine, koji su linearno nezavisna, i što ćemo onda zbir tih partikularnih rešenja pomnoži sa konstantama C_1 i C_2 ; tj. opšte rešenje je $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Potražimo sada partikularne integrale jednačine (1). U tu svrhu potražimo partikularna rešenje date jednačine, sledeći Ojlera, u obliku funkcija

$$(2) \qquad y=e^{rx},$$

gde je r neki konstantan broj (realan ili kompleksan), koji treba tako odrediti, pa da funkcije (2) identički zadovolje jednačinu (1). Zamenom funkcije (2) u jednačinu (1), sledi

$$(3) \qquad L(e^{rx})=P(r)e^{rx},$$

gde je $$(4) \qquad P(r) = r^2+a_1r+a_2$$

Funkcija $y=e^{rx}$ biće rešenje jednačine (1), tj. $L(e^{rx}) = 0$[1], ako r bude koren jednačine koja je nastala od polinoma (4)

$$(5) \qquad P(r) = r^2+a_1r+a_2 = 0.$$

Jednačina (5) obično se naziva karakterističnom jednačinom, a njeni koreni – karakterističnim brojevima jednačine (1).

Neposrednom zamenom se može utvrditi da svakom korenu r karakteristične jednačine odgovara partikularni integral $y=e^{rx}$. Ali budući da je

$$r_{1,2}=\frac{a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2}}{2}$$

očito je onda da će fundamentalno rešenje zavisiti od oblika korena karakteristične jednačine. Možemo razlikovati tri osnovna slučaja:

a) ako je $a_1^2–4a_2 >0$ koreni karakterističog polinoma su rarličiti realni brojevi.

b) ako je $a_1^2–4a_2 <0$ koreni karakterističog polinoma su kompleksni brojevi.

c) ako je $a_1^2–4a_2 =0$ koreni karakterističog polinoma su jednaki realni brojevi.

U slučaju (a) opšte rešenje jednačine (1) je

$$(a) \qquad y = C_1 e^{r_1x} + C_2 e^{r_2x}.$$

Primer (8): Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $2y'' + y' - y = 0$

Datu homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima pogodnije je prikazati u obliku, $y'' +(1/2)\ y' - (1/2)\ y = 0$. Budući da je $y=e^{rx}$, $y'=r\ e^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$ sledi da je karakteristični polinom date jednačine

$$r^2 +(1/2)\ r - (1/2) = 0.$$

---

[1]Naime, kako je $y'= r\ e^{rx}$, $y''=r^2\ e^{rx}$, nije teško videti da se jednačina (1) svodi na relaciju $e^{rx}(r^2+a_1r+a_2)=0$. Ali kako je $e^{rx}\neq 0$ za $\forall x$ sledi jednačina (5).

Kako je $a_1^2 – 4a_2 > 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \Re, r_1 \neq r_2$, tj. $r_1 = 1/2$, $r_2 = -1$, samim tim opšte rešenje date diferencijalne jednačine je $y = C_1 e^{(1/2)x} + C_2 e^{-x}$.

U slučaju (b) opšte rešenje jednačine (1) je

$$\text{(b)} \qquad y = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x}.$$

Zapis (b) možemo transformisati i u sledeće oblike. Naime kako je

$y = C_1 e^{ax} e^{+ibx} + C_2 e^{ax} e^{-ibx}$, i kako je $e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$, sledi relacija

$$\text{(b')} \qquad y = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx),$$

gde su nove konstante A i B povezane sa predhodnim konstantama C_1 i C_2 na sledeći način $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$. Ako bi pak uveli nove konstante C i D tako da je $A = C\sin D$, $B = C\cos D$ opšte rešenje za slučaj (b)moguće je prikazati i u obliku

$$\text{(b'')} \qquad y = C e^{ax} \sin(bx + D).$$

Primer (9): Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Kako je karakteristični polinom $r^2 + 4r + 13 = 0 \Rightarrow a_1^2 – 4a_2 < 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in C, r_1 \neq r_2$, tj. $r_1 = -2 + 3i$ $r_2 = -2 - 3i$, samim tim opšte rešenje date diferencijalne jednačine je, na primer, $y = e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

U slučaju (c) opšte rešenje jednačine (1) je

$$\text{(c)} \qquad y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

Naime kako je u tom slučaju $a_1^2 – 4a_2 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \Re$, $r_1 = r_2$, sledi da su partikularna rešenja linearno zavisna. Zato se drugo partikularno rešenje traži u obliku $y_2 = uy_1$, gde je u funkcija od promenljive x čiji je drugi izvod jednak nuli. Iz fanilije funkcija $u = u(x)$ korisimo najednostavniju funkciju koja zadovoljava tražene uslove a to je funkcija $u = x$ ($u'' = 0$).

Primer (10): Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 2y' + y = 0$.

Kako je karakteristični polinom date jednačine $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow a_1^2 – 4a_2 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \Re, r_1 = r_2 = -1$, pa su samim tim partikularna linearno nezavisna rešenja funkcije: $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$. Opšte rešenje date diferencijalne jednačine je funkcija $y = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x}$.

(f) Integracija linearnih nehomogenih diferencijalnih jedančina drugog reda sa konstantnim koeficijentima

Neka je data nehomogena diferencijalne jednačine drugog reda

$$(1) \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

gde su a_1, a_2 poznate konstante. Pokazaćemo da je ovu jednačinu uvek moguće prointegraliti, tj. doći do opšteg rešenja, samo pomoću integrala *elementarnih funkcija*. Iz predhodo pokazanih teorema sledi da je opšte rešenje nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima moguće dobiti tako što ćemo prvo odrediti – opšte rešenje (y_h) "odgovarajuće" homogene jednačine[2], i jednan partikularni integral ($y_{nd} = \eta$) koji odgovara datoj postavljenoj jednačini (tj. $L(y) = f(x)$) i što ćemo zatim – formirati zbir tih rešenja; tj. opšte rešenje nehomogena diferencijalne jednačine drugog reda sa konstatnim koeficijetima je moguće odrediti kao zbir funkcija

$$y = y_h + y_{nd} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \eta.$$

Za određivanje partikularnog rešenja η korisno je razlikovati sledećia tri najednostavnija karakretističa slučaja, funkcija f(x) je:

(a) polinom

[2]Jednačina koja se dobije iz zapisa (1) kada smatramo da je $f(x) = 0$

(b) sinusna ili kosinusna fukcija

(c) eksponencijalna funkcija

Slučaj (a): Desna strana jednačine (1) je polinom n-og reda. Opšte rešenje η je onda takođe polinom reda qn, gde je n – stepen polinoma, a q – red najnižeg izvoda L(y).

Primer (11): Odrediti: 1) partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' + 2y = x^2+1$, a zatim odrediti 2) opšte rešenje date jednačine.

1) za datu nehomogenu jednačinu n=2 a q=0 pa samim tim funkciju $\eta=\eta(x)$ treba tražiti u obliku polinoma drugog reda tj. u obliku $\eta= a_2x^2+a_1x+a_o$, gde su a_2, a_1, a_o konstante koje treba odrediti iz uslova $L(\eta)=f(\eta)$. U tom cilju potražimo prvi i drugi izvod funkcije η, sledi $\eta' = 2a_2x+a_1$, $\eta'' =2a_2$, a zatim formirajmo relaciju $L(\eta)=f(\eta) \Rightarrow 2a_2+ 2(a_2x^2+a_1x+a_o) = x^2+1$. polinomi su identički jednaki kad su im jednaki koeficijenti istih potencija, tj. u našem primeru $(2a_2)x^2+(2a_1)x+(2a_2 + 2a_o) = (1)x^2+(0)x +1$. Tako iz tri nastale algebarske jednačine određujemo tražene koeficijente polinoma: $2a_2=1$, $2a_1=0$, $2a_2 + 2a_o=1 \Rightarrow a_2=1/2$, $a_1=0$, $a_o=0$. Traženo partikularno rešenje, nehomogenog dela, je funkcija oblika $\eta= y_{nd} = (1/2)x^2$.

2) homogena jednačina koja sledi iz date nehomogene jednačini je $y'' + 2y = 0$, pa je karakteristični polinom $r^2 + 2 = 0 \Rightarrow r_1=\sqrt{2}i$, $r_2= -\sqrt{2}i$. Tako da je opšte rešenje homogene jednačine $y'' + 2y=0$, $y_h = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)$. Opšte rešenje pak tražene nehomogene jednačine je funkcija $y = y_h + y_{nd}$, tj.

$$y = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) + (1/2)x^2.$$

Primer (12): Odrediti: 1) partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' - y' = 1+ 2x - 3x^2$, a zatim odrediti 2) opšte rešenje date jednačine.

1) za datu nehomogenu jednačinu n=2 a q=1 pa samim tim funkciju $\eta=\eta(x)$ treba tražiti u obliku polinoma trećeg reda tj. u obliku $\eta= a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_o$, gde su a_3, a_2, a_1, a_o konstante koje treba odrediti iz uslova $L(\eta)=f(\eta)$. U tom cilju potražimo prvi i drugi izvod funkcije η, sledi $\eta' = 3a_3x^2+2a_2x+a_1$, $\eta''=6a_3x+2a_2$, a zatim formirajmo relaciju $L(\eta)=f(\eta) \Rightarrow$

$6a_3x+2a_2 - (3a_3x^2+2a_2x+a_1) = 1+ 2x - 3x^2$. Polinomi su identički jednaki kad su im jednaki koeficijenti istih potencija, tj. u našem primeru

$(- 3a_3)x^2+(6a_3x-2a_2)x + (2a_2 - a_1) = (- 3)x^2+(2)x +1$. Tako iz tri nastale algebarske jednačine određujemo tražene koeficijente polinoma: $a_3=1$, $a_2=2$, $a_1=3$. Traženo partikularno rešenje, nehomogenog dela, je funkcija oblika

$$\eta = y_{nd} = x^3+2x^2+3x$$

2) homogena jednačina koja sledi iz date nehomogene jednačini je $y'' - y' = 0$, pa je karakteristični polinom $r^2 -r = 0 \Rightarrow r_1=0$, $r_2=1$. Tako da je opšte rešenje homogene jednačine $y'' - y' = 0$, $y_h = C_1e^o + C_2 e^x$. Opšte rešenje pak tražene nehomogene jednačine je funkcija

$$y = y_h + y_{nd} = C_1+ C_2 e^x + x^3+2x^2+3x.$$

Slučaj (b): Desna strana diferencijalne nehomogene jednačine (1) je trigonometriska funkcija $f(x)=k\cos(bx)$ ili funkcija $f(x)= k\sin(bx)$, gde su k i b poznate konstante. Partikularno rešenje η je onda takođe trigonometriska funkcija do koje je najlakše doći tako što ćemo je pretpostaviti u obliku funkcije $\eta(x)=A\cos(bx) + B\sin(bx)$, gde su A i B konstante koje ćemo odrediti iz uslova da je $L(\eta)=f(\eta)$.

Primer (13): Odrediti: 1) partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' - 3y' - 4y = \sin x$, a zatim odrediti 2) opšte rešenje date jednačine.

1) Potražimo partikularno rešenje u obliku $\eta(x)=A\cos(x) + B\sin(x)$ iz uslova da je $L(\eta) = f(\eta)$. Potrebne izvodne funkcije su $\eta' = -A\sin(x) + B\cos(x)$,

$\eta'' = -A\cos(x) - B\sin(x)$ pa je traženi identitet oblika

$$(-5A-3A)\cos(x) + (3A-5B)\sin(x) = (0)\cos x + (1)\sin(x).$$

Pošto predhodna relacija mora biti identički zadovoljena za svako x sledi da će to biti samo ako je $(-5A-3A)=0$, $(3A-5B)=1$; tj. ako koeficijenti A i B zadovoljavaju ove dve algebarske jednačine. Lako je pokazati da je $A=3/34$, $B=-5/34$ pa je traženo partikularno rešenje nehomogenog dela date diferencijalne jednačine funkcija $\eta(x) = y_{nd} = 3/34\cos(x) - 5/34\sin(x)$.

2) Kako je karakteristični polinom date diferencijalne jednačine $r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow r_1=4$, $r_2=-1$ pa je rešenje homogenog dela date nehomogene diferencijalne jednačine $y_h = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$ a opšte rešenje date nehomogene diferencijalne jednačine je $y=y_h+y_{nd} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} + 3/34\cos(x) - 5/34\sin(x)$.

Napomena: Ako nehomogena diferencijalna jednačina (1) ima, jedan od navedenih, oblika

$$y'' + b^2 y = k\sin(bx)$$

$$y'' + b^2 y = k\cos(bx)$$

gore naveden oblik partikularne funkcije nas ne vodi ka rešenju u tom slučaju šešenje ćemo potražiti u obliku

$$\eta(x) = y_{nd} = Ax\mathrm{sim}(bx) \text{ ili } \eta(x) = y_{nd} = Ax\cos(bx).$$

Primer (14): Odrediti: 1) partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' + 9y = 4\sin(3x)$, a zatim odrediti 2) opšte rešenje date jednačine.

1) Potražimo rešenje za nehomogeni deo date diferencijalne jednačine u obliku $\eta(x) = y_{nd} = Ax\cos(3x)$, iz uslova da je $L(\eta) = f(\eta)$. Potrebne izvodne funkcije su $\eta' = A\cos(3x) - 3Ax\sin(3x)$, $\eta'' = -3A\sin(3x) - 3A\sin(3x) - 9Ax\cos(3x)$ pa je traženi identitet oblika

$$-3A\sin(3x) - 3A\sin(3x) - 9Ax\cos(3x) + 9Ax\cos(3x) = 4\sin(3x)$$

$$\text{tj. } -6A\sin(3x) = 4\sin(3x).$$

Pošto ova relacija mora važiti za svako $x \Rightarrow A = -(2/3)$, pa je

$$\eta(x) = y_{nd} = -(2/3)x\cos(3x).$$

2) Kako je karakteristični polinom date diferencijalne jednačine $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r_1=3i$, $r_2=-3i$ pa je rešenje homogenog dela date nehomogene diferencijalne jednačine $y_h = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$ a opšte rešenje date nehomogene diferencijalne jednačine je $y=y_h+y_{nd} = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) - (2/3)x\cos(3x)$.

Slučaj (c): Desna strana jednačine (1) je eksponencijalna funkcija $f(x)=ke^{bx}$, gde su k i b poznate konstante. Partikularno rešenje η je onda takođe eksponencijalna funkcija, stim što možemo razlikovati naredna tri sučaja:

– (A) ako je $b \neq r_1 \neq r_2 \quad \Rightarrow \quad \eta(x) = (ke^{bx})/P(b)$,

– (B) ako je $b = r_1 \neq r_2 \quad \Rightarrow \quad \eta(x) = (kxe^{bx})/P'(b)$,

– (C) ako je $b = r_1 = r_2 \quad \Rightarrow \quad \eta(x) = (kx^2e^{bx})/P''(b)$,

gde je polinom $P(b)$, prvi izvod polinoma $P'(b)$,..., nastao od karekterističnog polinoma kada stavimo da je $r = b$.

Primer (15): Odrediti: 1) partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' - 6y' + 8y = e^x$, a zatim odrediti 2) opšte rešenje date jednačine.

1) za datu nehomogenu diferencijalnu jednačinu b=1, a iz karakterističnog polinoma $r^2 - 6r + 8 = 0$ nalazimo da je $r_1 = 4$, $r_2 = 2$; sledi da je $b \neq r_1 \neq r_2$, tj. iz stava (A) nalazimo da je partikularno rešenje

funkcija η (x)=y_{nd} = (e^x)/P(b), gde je P(b)= $b^2 - 6b + 8 = 0$, pa je P(b=1)=3, $\Rightarrow$ $\eta(x) = (e^x)/3$.

2) Rešenje homogenog dela date diferencijalne jednačine je $y_h = C_1\, e^{4x} + C_2\, e^{2x}$, pa je opšte rešenje date nehomogene jednačine $y = C_1\, e^{4x} + C_2\, e^{2x} + (e^x)/3$.

Primer (16): Pokazati da je partikularno rešenje nehomogenog dela, diferencijalne jednačine, $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ funkcija $\eta(x) = (xe^{2x})/2$.