Zadatak: ①Materijalnu tačku M, mase m, kreće se pod dejstvom privlačnih sila čiji se izvori nalaze u tačkama O i A, a intenzitet im je proporcionalan rasojanjima M0, odnosno MA, sa koeficijentom proporcionalnosti mk^2. Izvor sile O, nepomičan je i nalazi se u koordinatnom početku inercijalnog sistema 0xy, a izvor sile A se kreće konstantnom brzinom (u=const) po 0x osi. U početnom trenutku $t_0=0$ centar A je bio u koordinatnom početku a tačka M se nalazila u položaju $M_0(0, h)$ u stanju mira. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.

Rešenje zadatka ①
Ovaj zadatak odnosi se na slučaj kretanja slobodne materijalne tačke i to na njen inverzni zadatak.

S obzirom na usvojeni inercijalni sistem referencije 0xy, silu privlačenja $\mathbf{F}_o$, čiji je centar u koordinatnom početku, možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{F}_o = mb^2\mathbf{MO} = -mb^2\mathbf{OM} = -mb^2\mathbf{r}\ .$$

Silu privlačenja $\mathbf{F}_A$, čiji je centar smešten u pokretnoj tački A, možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{F}_A = mb^2(x_A\,\mathbf{i} + \mathbf{MO}) = mb^2(ut\,\mathbf{i} - \mathbf{OM}) = mb^2(ut\,\mathbf{i} - \mathbf{r})\ .$$

Zakon kretanja tačke A, koja se kreće po osi 0x, izveli smo iz činjenice da je brzina tačke A bila konstantna, tj. $\frac{dx_A}{dt} = u \Rightarrow dx_A = udt$, pa kako je $x_A(t_o=0)=0$, sledilo je $x_A=ut$.

Vektorska diferencijalna jednačina kretanja (1) sada glasi:

$$\text{(I-1)}\quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_A = -mb^2\mathbf{r} + mb^2(ut\,\mathbf{i} - \mathbf{r}) = mb^2(ut\,\mathbf{i} - 2\mathbf{r})\ .$$

Projektovanjem ove vektorske jednačine na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema, dobićemo sledeće dve skalarne diferencijalne jednačine kretanja:

$$\text{(I-a)}\quad m\ddot{x} = mb^2(ut - 2x) \;\Rightarrow\; \ddot{x} + 2b^2x = b^2ut\ ,$$

$$\text{(I-b)}\quad m\ddot{y} = -2mb^2y \;\Rightarrow\; \ddot{y} + 2b^2y = 0\ .$$

Prva jednačina je linearna nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, pa je njeno opšte rešenje (pogledati dodatak I) dato u vidu zbira opšteg integrala homogene jednačine i partikularnog integrala nehomogene jednačine, tj.

$$x = x_h + x_{nd} ,$$

gde je

$$x_h = C_1\cos (b\sqrt{2}t) + C_2\sin(b\sqrt{2}t),\ x_{nd} = (1/2)ut ,$$

pa je opšti integral razmatrane nehomogene jednačine:

$$\text{(I-a')}\quad x = C_1\cos (b\sqrt{2}t) + C_2\sin(b\sqrt{2}t) + (1/2)ut .$$

Ako diferencirajmo po vremenu jednačinu (I-a'), dobićemo:

$$\text{(I-a'')}\quad \dot{x} = -b\sqrt{2}C_1\sin (b\sqrt{2}t) + b\sqrt{2}C_2\cos(b\sqrt{2}t) + (1/2)u .$$

Zamenom početnih uslova kretanja koji su vezani za promenljivu x, $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 0$, u jednačine (I-a'), (I-a''), dobijamo sistem iz koga odre|ujemo konstante integracije, od dve algebarske jednačine sa dve nepoznate, C_1 i C_2:

$$0 = C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$
$$0 = b\sqrt{2}\, C_2 + (1/2)u \Rightarrow C_2 = -(u/2\sqrt{2}\, b) .$$

Na taj način prva konačna jednačina kretanja tačke M menja se po zakonu:

$$x = -(u/2\sqrt{2}\, b)\sin(b\sqrt{2}t) + (1/2)ut .$$

Druga jednačina kretanja (I-b) je homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima i opšti integral te jednačine je:

$$\text{(I-b')}\quad y = C_3\cos (b\sqrt{2}t) + C_4\sin(b\sqrt{2}t) .$$

Da bismo odredili proizvoljne integracione konstante C_1 i C_2, diferencirajmo jednačinu (I-b') po vremenu:

$$\text{(I-b'')}\quad \dot{y} = -b\sqrt{2}C_3\sin (b\sqrt{2}t) + b\sqrt{2}C_4\cos(b\sqrt{2}t) .$$

Zamenom početnih uslova, $y(0) = h$, $\dot{y}(0) = 0$, u jednačine (I-b'), (I-b''), odredićemo integracione konstante C_3 i C_4:

$$h = C_3 \Rightarrow C_3 = h$$
$$0 = b\sqrt{2}C_4 \Rightarrow C_4 = 0 .$$

Na osnovu ovih konstanti, koordinata y tačke M, tj. druga konačna jednačina kretanja tačke M, menja se po zakonu:

$$y = h\cos(b\sqrt{2}t) .$$

zadaci za vežbu

1. Materijalna tačka M, mase m, počinje u trenutku $t_0=0$ da se kreće iz položaja $\mathbf{r}(b, 0)$ gde je $\mathbf{r}$ radijus vektor tačke i gde je b=const, brzinom $\mathbf{V}(0, V_0)$, u odnosu na Dekartov nepomični koordinatni sistem 0xy. Na tačku dejstvuju: odbojna sila $\mathbf{F}_1$, srazmerna odstojanju tačke do nepokretnog centra odbijanja koji je smešten u koordinatnom početku. Koeficijent srazmere je $4mc^2$, c=const; i konstantna sila $\mathbf{F}_2(-mc^2b, 0)$. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke.

2. Materijalna tačka M, mase m, počinje u trenutku $t_0=0$ da se kreće iz položaja $\mathbf{r}(b, 0)$ gde je $\mathbf{r}$ radijus vektor tačke i gde je b=const, brzinom $\mathbf{V}(0, V_0)$, u odnosu na Dekartov nepomični koordinatni sistem 0xy. Na tačku dejstvuje privlačna sila $\mathbf{F}_1$, srazmerna odstojanju tačke do nepokretnog centra privlačenja koji je smešten u koordinatnom početku. Koeficijent srazmere je $3mc^2$, c=const. Na tačku dejstvuje i konstantna sila $\mathbf{F}_2(-mc^2b, 0)$. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke.

3. Materijalna tačka M, mase m, kreće se pod dejstvom sile koja stalno ostaje paralelna 0x osi Dekartovog nepomičnog koordinatnog sistema 0xy. Intenzitet sile je $F=mb^2t^2$, (b=const). Ako je u početnom trenutku $t_0=0$ tačka bila u koordinatnom početku sa početnom brzinom $\mathbf{V}(0, V_0)$ odrediti konačne jednačine kretanja katke M kao i njenu liniju putanje.

4. Materijalna tačka M, mase m, kreće se pod dejstvom centralne privlačne sile proporcionalne rastojanju tačke M mereno od nepokretnog centra privlačnja koji je smešten u koordinatnom početku Dekartovog nepomičnog koordinatnog sistema 0xy. Koeficijent proporcionalnosti je mk^2. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$ tačka bila u položaju $M_0(0, b)$ kada joj je bila saopštena početna brzina $\mathbf{V}(V_0, 0)$ odrediti konačne jednačine kretanja i liniju putanje tačke .

5. Materijalna tačka M, mase m, kreće se pod dejstvom centralne odbojne sile proporcionalne rastojanju tačke M od nepokretnog centra odbijanja koji je smešten u koordinatnom početku Dekartovog nepomičnog koordinatnog sistema 0xy. Koeficijent proporcionalnosti je mk^2. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$ tačka bila u položaju $M_0(0, b)$ kada joj je bila saopštena početna brzina $\mathbf{V}(V_0, 0)$ odrediti konačne jednačine kretanja i liniju putanje tačke.

6. U temenima, u odnosu na Dekartov nepomični koordinatni sistem 0xy, $A(b\sqrt{2}, 0)$, $B(0, 0)$ i $C(0, b\sqrt{2})$ jednakokrakog pravouglog trougla, čija je hipotenuza 2b, nalaze se nepomični centri privlačenja materijalne tačke M, mase

m. Sile privlačenja proporcionalne su rastojanjima tačke M do odgovarajućeg centra sa jednakim koeficijentom proporcionalnosti mk^2. Ako je tačka M u početnom trenutku $t_0=0$ bila u miru u temenu B(0, 0), odrediti konačne jednačine kretanja, liniju putanje i intenzitet brzine tačke M u zavisnosti od vremna.

7. Materijalna tačka M, mase m, kreće se pod dejstvom tri privlačne sile, koje su proporcinoalne rastojanjima tačke M do odgovarajućeg centra. Koeficijent proporcionalnosti za svaku od pomenute tri sile je isti i iznosi mk^2. Nepomični centri privlačenja nalaze se, u odnosu na Dekartov nepomični koordinatni sistem 0xy, u tačkama A(–b, 0), B(b, 0) i C(0, b). Ako je tačka M u početnom trenutku $t_0=0$ bila u miru u temenu B odrediti njene konačne jednačine kretanja i liniju putanje.

8. Materijalnu tačku M, mase m, privlače dva nepokretna centra privlačenja koji su smešteni, u odnosu na Dekartov nepomični koordinatni sistem 0xy, u tačkama O_1(–b, 0) i O_2(b, 0) silama $\vec{F_1} = mk^2\,\vec{MO_1}$ i $\vec{F_2} = mk^2\,\vec{MO_2}$, gde je b=konst, k=konst. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$, tačka bila u položaju M_0(b, b) i imala početnu brzinu **V**(0, V_0) odrediti konačne jednačine kretanja tačke kao i njenu trajektoriju.

9. Materijalnu tačku M, mase m, privlače dva nepokretna centra privlačenja koji su smešteni, u odnosu na Dekartov nepomični koordinatni sistem 0xy, u tačkama O_1(–b, 0) i O_2(0, b). Intenziteti privlačnih sila su proporcionalni rastojanju tačke do odgovarajućeg centra privlačenja; koeficijent proporcionalnosti je mk^2. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$, tačka bila u miru u položaju M_0(2b, 0) odrediti konačne jednačine kretanja tačke kao i njenu trajektoriju.

10. Materijalna tačka M, mase m, kreće se pod dejstvom dveju sila, od kojih je prva privlačna sa nepokretnim centrom privlačenja C_1, a druga odbojna sila sa nepokretnim centrom C_2, pri čemu je rastojanje između centara C_1C_2=b, (b=const). Prva sila je srazmerna rastojanju tačke M do centra C_1, sa koeficijentom srazmernosti $3mk^2$ dok je druga sila srazmerna rastojanju tačke M do centra C_2, sa koeficijentom srazmernosti $5mk^2$. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$, tačka bila u miru u na duži koja spaja centre C_1 i C_2 tj, u položaju M_0C_1=b/4 odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.

11. Materijalna tačka M, mase m, kreće se pod dejstvom dveju sila, od kojih je prva privlačna sa nepokretnim centrom privlačenja C_1, a druga odbojna sila sa nepokretnim centrom C_2, pri čemu je rastojanje između centara C_1C_2=b, (b=const). Prva sila je srazmerna rastojanju tačke M do centra C_1, sa koeficijentom srazmernosti mk^2 dok je druga sila srazmerna rastojanju tačke M do centra C_2, sa koeficijentom srazmernosti mk^2. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$, tačka bila u miru u na duži koja spaja centre C_1 i C_2 tj, u položaju M_0C_1=b/4 odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.

12. Materijalnu tačku M, mase m, privlači sila, koja je proporcionalna rastojanju do svog pokretnog centra C, koeficijent proporcionalnosti je mk^2. Centar privlačenja C se kreće po 0x osi, Dekartovog nepomičnog koordinatnog sistema 0xy, konstantnom brzinom čiji je intenzitet u. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$, tačka bila u položaju $M_0(0, b)$, i imala početnu brzinu $\mathbf{V}(V_o,0)$ odrediti konačne jednačine kretanja tačke M. Uzeti da je centar privlačenja C u $t_0=0$ bio u koordinatnom početku.

13. Materijalnu tačku M, mase m, odbija sila, koja je proporcionalna rastojanju do svog pokretnog centra C, koeficijent proporcionalnosti je mk^2. Centar odbijanja C se kreće po 0x osi, Dekartovog nepomičnog koordinatnog sistema 0xy, po zakonu OC= 2t+3. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$, tačka bila u položaju $M_0(0, b)$, i imala početnu brzinu $\mathbf{V}(V_o,0)$ odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.

14. Materijalnu tačku M, mase m, privlači sila, koja je proporcionalna rastojanju do svog pokretnog centra C, koeficijent proporcionalnosti je mk^2. Centar privlačenja C se kreće po 0y osi, Dekartovog nepomičnog koordinatnog sistema 0xy, po zakonu $OC= 3t^2+1$. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$, tačka bila u položaju $M_0(b, 0)$, i imala početnu brzinu $\mathbf{V}(V_o,0)$ odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.

15. Materijalnu tačku M, mase m, privlači sila, koja je proporcionalna rastojanju do svog pokretnog centra C, koeficijent proporcionalnosti je mk^2. Centar privlačenja C se kreće po 0x osi, Dekartovog nepomičnog koordinatnog sistema 0xy, po zakonu OC=3sin2t. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$, tačka bila u položaju $M_0(0, b)$, i imala početnu brzinu $\mathbf{V}(V_o,0)$ odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.

16. Materijalna tačka M, mase, m kreće se u homogenom polju sile zemljine teže. Na tačku sve vreme kretanja dejstvuje i horizontalna sila **F**, čiji je impuls $\mathbf{I}(0, m(y^2+1))$. U početnom trenutku $t_0=0$, tačka je bila u položaju $M_o(1,0)$ i imala početnu brzinu $\mathbf{Vo}(0, -1)$. Odrediti silu F u funkciji koordinate y, kao i konačne jednačine kretanja tačke M. Zadate veličine su date u Međunarodnom sistemu jedinica tj. impuls u kgm/s a brzina u m/s.

17. Materijalna tačka M jedinične mase kreće se pod dejstvom sile: $\vec{F} = (e^{t} - x + 2\frac{dx}{dt})\,\vec{i}$; gde je $\vec{i}$ jedinični vektor 0x ose. Odrediti zakon kretanja tačke M ako je ona u početnom trenutku bila u miru u koordinatnom početku. Zadate veličine su date u Međunarodnom sistemu jedinica.

18. Materijalnu tačku M, mase m, privlači sila, koja je proporcionalna rastojanju do svog pokretnog centra C, koeficijent proporcionalnosti je mk^2, (napadna linija sile prolazi kroz tačku M i centar C); centar privlačenja C se, u odnosu na nepomični Dekartov koordinatni sistem 0xyz, kreće po krugu $x^2+z^2=R^2$ konstantnom brzinom $V_c= \omega R$, gde je ω=const. Odrediti konačne

jednačine kretanja tačke M ako je ona u početnom trenutku $t_0=0$, bila u koordinatnom početku i imala početnu brzinu $\mathbf{V}(0, V_o, 0)$.

19. Materijalna tačka M, mase m, izbačena je, u početnom trenutku $t_0=0$, početnom brzinom V_0 pod uglom od 45^0 prema horizontali (0x osi), da se kreće u homogenom polju sile zemljine teže. Pri kretanju tačka nailazi na otpor vazduha koji je proporcionalan brzini; koeficijent proporcionalnosti je mk^2. Odrediti konačne jedančine kretanja i graničnu vrednost brzine tačke M. Pokazati da linija putanje tačke M ima vertikalu asiptotu. Za referentni sistem izabrati nepomični Dekartov koordinatni sistem 0xy; osa 0y je orjentisana vertikalo naviše.

20. Materijalna tačka M, mase m, izbačena je, u početnom trenutku $t_0=0$, početnom brzinom V_0 pod uglom od 30^0 prema horizontali (0x osa), da se kreće u homogenom polju sile zemljine teže. Pri kretanju tačka nailazi na otpor vazduha koji je proporcionalan brzini; koeficijent proporcionalnosti je mk^2. Odrediti: a) konačne jedančine kretanja tačke M, b) koordinate najviše tačke na putanji (M_1=?), c) impuls otporne sile u intervalu vremena t_{01}. Za referentni sistem izabrati nepomični Dekartov koordinatni sistem 0xy; osa 0y je orjentisana vertikalno naviše.

21. Materijalna tačka M, mase m, kreće se pod dejstvom odbojne sile koja je obrnuto proporcionalna kubu rastojanja od centra O. Koneficijent proporcionalnosti je mk^2 i on je konstantan. Ako je u početnom trenutku $t_0=0$, tačka bila u položaju $M_0(b, 0)$, u odnosu na Dekartov nepomični koordinatni sistem 0xy, i imala početnu brzinu $\mathbf{V}(V_o,0)$ odrediti konačne jednačine kretanja tačke kao i vreme koje je potrebno da tačka iz početnog položaja dođe u položaj $M_1(2b, 0)$.

22. Materijalna tačka M, mase m, kreće se pod dejstvom dveju privlačnih sila čiji su intenziteti obrnuto proporcionalni kvadratu rastojanja tačke M do nepomičnih centara privlačenja A i B. Centri privlačenja su na 0x osi , centar A u koordinatnom početku a centar B na odstojanju 4a (a=const) od njega. U početnom trenutku tačka je bila tri puta bliža centru A i imala je duž 0x ose brzinu Vo. Kolika po intenzitetu treba da bude početna brzina da bi tačka M stigavši na sredinu duži AB stala.

23. Teška tačka M, mase m, izbačena je iz koordinatnog početka duž vertikalne 0y ose (osa 0y je orjentisana vertikalno naviše) početnom brzinom V_o. Na tačku deluje sila konstantnog horizontalnog pravca srazmerno rastojanju tačke M od horizontalne 0x ose (koeficijent srazmere je k). Odrediti koeficijent k tako da domet tačke M bude jednak maksimalnoj visini penjanja tačke.

24. Materijalna tačka M, mase m, kreće se u prostoru koji je određen Dekartovim nepomičnim koordinatnim sistemom 0xyz, pod dejstvom sile $\mathbf{F}(mbV_y , -mbV_x)$. U početnom trenutku kada je $t_0=0$, tačka M je bila u položaju $M_0(0, V_o/b, 0)$ i imala početnu brzinu $\mathbf{V}_0(2V_o, 0, V_o)$. Odrediti: (a) konačne

jednačine kretanja tačke M, (b) projekciju linije putanje tačke M na 0xy ravan; šta je trajektorija tačke M?

25. Materijalna tačka M, jedinične mase m, kreće se u ravni 0xy tako da joj je brzina **V** (2(x-y), 2(y-x)). U početnom trenutku t_0=0, tačka M je imala y_o=1 a V_y=4. Odrediti: (1) konačne jednačine kretanja tačke, (2) trajektoriju tačke, (3) intenzitet sile koja izaziva takvo kretanje u funkciji vremena.

26. Materijalna tačka M, jedinične mase m, kreće se u homogenom polju sile zeljine teže pod dejstvom pogonske sile **F** (čiji je pravac i smer određen vektorom brzine tačke M) čiji je intenzitet takav da obezbeđuje konstantnost intenziteta brzine tačke M tj. V(t)= V_0 . U početnom trenutku t_0=0, tačka M je bila u koordinatnom početku kada joj je saopštena početna brzina V_0 koja sa osom 0x zaklapa ugao 30^0. Odrediti tačku maksimalne visine $M_1(x_1=?,\ y_1=?)$. Osa 0y orjentisana je vertikalno naviše.

27. Materijalna tačka M, jedinične mase, kreće se polazeći iz mira iz koordinatnog početka pod dejstvom sile $\vec{F_1} = (t^2 - 3t + 2)\,\vec{i}$. U trenutku t_1 (t_1=?) kada tačka M dostigne maksimalnu brzinu na nju počinje da dejstvuje i centralna privlačna sila F_2; centar privlačenja je u nepomičnoj tački B(0, b); b=const. Sila F_2 je proporcionalna rastojanju; koeficijent proporcionalnosti je mk^2. Odrediti konačne jednačine kretanja, u odnosu na nepomični koordinatni sistem 0xy, tačke M koje ona izvodi pod dejstvom ove dve sile.