Права и раван

Математика 1 - лекција 4

Душан Ђукић

---

1. Да ли једначине (а) $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z}{2}$, (б) $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=1-z$ и (в) $(x,y,z)=(3,5,-1)+t(-2,-3,1)$ $(t\in\mathbb{R})$ описују исту праву?

   <u>*Решење.*</u> Да. Вектори правца правих (а), (б) и (в) су редом $(-4,-6,2)$, $(2,3,-1)$ и $(-2,-3,1)$, дакле колинеарни су, а осим тога, све "три" праве пролазе кроз исту тачку $(1,2,0)$ (у (в) се она добија за $t=1$).

2. Израчунати угао између равни $\alpha(x+y=3)$ и $\beta(x+z=5)$.

   <u>*Решење.*</u> Нормале равни α и β су редом $\vec{n}_\alpha=(1,1,0)$ и $\vec{n}_\beta=(1,0,1)$. Угао између равни α и β је једнак углу φ између њихових нормала, а знамо да је $\cos(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)=\frac{\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha|\cdot|\vec{n}_\beta|}=\frac{1}{2}$, па је $\varphi=60^\circ$.

3. Израчунати угао између праве $p(x-3=y=\frac{2-z}{5})$ и равни $\pi(x+y+z=2)$.

   <u>*Решење.*</u> Нормала равни π је вектор $\vec{n}=(1,1,1)$, а вектор правца праве p је $\vec{p}=(1,1,-5)$. Угао φ између p и π је једнак $|90^\circ-\sphericalangle(\vec{n},\vec{p})|$, па је $\sin\varphi=|\cos\sphericalangle(\vec{n},\vec{p})|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|}=\frac{1}{3}$, тј. $\varphi=\arcsin\frac{1}{3}$.

4. Наћи једначину равни која садржи тачке $A(1,2,0)$, $B(0,1,3)$ и $C(3,-1,4)$.

   <u>*Решење.*</u> Нормала $\vec{n}$ тражене равни π нормална је на векторе $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,3)$ и $\overrightarrow{AC}=(2,-3,4)$, дакле $\vec{n}$ је колинеарно са вектором $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(5,10,5)=5(1,2,1)$, па можемо узети $\vec{n}=(1,2,1)$. Према томе, једначина равни π има облик $1\cdot x+2\cdot y+1\cdot z=d$, при чему из $A\in\pi$ следи $d=1\cdot1+2\cdot2+1\cdot0=5$. Одговор је $x+2y+z=5$.

5. Дате су тачке $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,3)$, $D(0,0,0)$ и $E(1,2,1)$. Ако је раван π одређена тачкама A,B и C, а права p тачкама D и E, одредити угао између p и π.

   <u>*Решење.*</u> Нормала на раван π је $\vec{n}_\pi=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-2,1,0)\times(-2,0,3)=(3,6,2)$, а вектор правца праве p је $\vec{p}=\overrightarrow{DE}=(1,2,1)$. Добијамо $\sin\sphericalangle(p,\pi)=|\cos\sphericalangle(\vec{n}_\pi,\vec{p})|=\frac{|(3,6,2)\cdot(1,2,1)|}{\sqrt{3^2+6^2+2^2\cdot1^2+2^2+1^2}}=\frac{17}{7\sqrt{6}}$, тј. $\sphericalangle(p,\pi)=\arcsin\frac{17}{7\sqrt{6}}$.

6. Одредити тачку пресека праве $p(\frac{x-1}{2}=-y=2z+1)$ и равни $\pi(x+y+z=3)$.

   <u>*Решење.*</u> Ако означимо $t=\frac{x-1}{2}=-y=2z+1$, добијамо $x=2t+1$, $y=-t$, $z=\frac{t-1}{2}$. Тачка $M=(2t+1,-t,\frac{t-1}{2})$ припада равни π ако је $(2t+1)+(-t)+\frac{t-1}{2}=3$, што даје $t=\frac{5}{3}$ и $M(\frac{13}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3})$.

7. Израчунати растојање од тачке $A(2,1,-1)$ до праве $p(\frac{x-2}{3}=-y,z=1)$.

   <u>*Решење.*</u> За $t=\frac{x-2}{3}=-y$, права p се може записати параметарски као $P(x,y,z)=(2+3t,-t,1)=(2,0,1)+t\vec{p}$, где је $\vec{p}=(3,-1,0)$ вектор правца. Нађимо тачку $P\in p$ за коју је $AP\perp\vec{p}$: имамо $\overrightarrow{AP}=(3t,-t-1,2)$ и $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{p}=3\cdot3t+(-1)(-t-1)+0\cdot2=10t+1=0$, па је $t=-\frac{1}{0}$ и $\overrightarrow{AP}=(-\frac{3}{10},-\frac{9}{10},2)$. Тада је $|AP|=\frac{7}{\sqrt{10}}$ и то је тражено растојање.

8. Дате су права $p(x=1-y=\frac{1-z}{2})$ и тачка $A(-1,4,3)$. Одредити праву која садржи тачку A и нормална је на p.

   <u>*Решење.*</u> Узмимо тачку $B(0,1,1)\in p$. Вектор правца праве p је $\vec{p}=(1,-1,-2)$. Пројекција вектора $\overrightarrow{BA}$ на p је $\overrightarrow{BA'}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}^2|}\vec{p}=\frac{(-1,3,2)\cdot(1,-1,-2)}{6}\vec{p}=(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3})$, па добијамо $A'=(-\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{11}{3})$. Тражена права је $AA':\ (-1,4,3)+t(1,5,2)$.

9. Написати једначину равни која пролази кроз тачку $A(2,0,-1)$ и нормална је на равни $\alpha(2x-y-3=0)$ и $\beta(x+y-z+1=0)$.

   Решење. Вектор нормале $\vec{n}$ тражене равни је нормалан на векторе нормала равни α и β, тј. на векторе $\vec{n}_\alpha=(2,-1,0)$ и $\vec{n}_\beta=(1,1,-1)$, дакле $\vec{n}=\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta=(1,2,3)$. Према томе, једначина тражене равни је облика $x+2y+3z=d$, па из припадности тачке A тој равни добијамо $d=1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot(-1)=-1$.

10. Одредити једначину равни π која садржи тачку $A(0,0,-1)$ и праву $p(\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1})$, а затим одредити растојање тачке $B(3,1,1)$ од равни π.

    Решење. Тачке праве p можемо записати и у облику $P+t\vec{p}$ $(t\in\mathbb{R})$, где је $P=(1,-1,0)$ и $\vec{p}=(2,3,1)$ вектор правца. Вектор нормале $\vec{n}$ равни π је $\vec{n}=\overrightarrow{AC}\times\vec{p}=(-4,1,5)$. Како $A=(0,0,-1)\in\pi$, одавде добијамо једначину π: $-4x+y+5(z+1)=0$, тј. $-4x+y+5z+5=0$. Растојање тачке $B=(3,1,1)$ од π је $\frac{|-4\cdot3+1\cdot1+5\cdot1+5}{\sqrt{(-4)^2+1^2+5^2}}=\frac{1}{\sqrt{42}}$.

11. Права q и раван ρ су дате једначинама $q(2x-1=3y+1,\ z=0)$ и $\rho(3x-y+z=1)$. Наћи ортогоналну пројекцију праве q на раван ρ.

    Решење. Тачке на q су дате са $(x,y,z)=(\frac{1}{2}+\frac{t}{2},-\frac{1}{3}+\frac{t}{3},0)$. Пресек $q\cap\rho$ се јавља за t које задовољава $3x-y+z=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}t+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t+0=1$, тј. $t=-\frac{5}{7}$ и $A=(\frac{1}{7},-\frac{4}{7},0)$. Узмимо $B(1,0,0)\in q$ и нађимо њену пројекцију B' на ρ. Важи $\overrightarrow{BB'}=t\vec{n}_\rho=t(3,-1,1)$, дакле $B'=(1+3t,-t,t)$. Из $B'\in\rho$ следи $3x-y+z=3+9t+2t=1$, значи $t=-\frac{2}{11}$ и $B'(\frac{5}{11},\frac{2}{11},-\frac{2}{11})$. Пројекција праве p на ρ је права AB': $(\frac{1}{7},-\frac{4}{7},0)+t(12,29,-7)$.

12. Кроз тачку $A(-1,-1,3)$ поставити праву која сече праву $p(\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1})$ под углом од 30°.

    Решење. Нађимо прво нормалу n из A на праву $p=(0,-2,3)+t(2,-1,1)$. Раван π кроз A нормална на p је $2x-y+z=2(-1)-(-1)+3=2$, а пресек $\pi\cap p$ је тачка P облика $(x,y,z)=(2t,-t-2,t+3)$ за коју је $2\cdot2t-(-t-2)+(t+3)=6t+5=2$, дакле $t=-\frac{1}{2}$ и $P=(-1,-\frac{3}{2},\frac{5}{2})$. Права n је одређена тачкама A и P. Тражена права q сече p у тачки Q таквој да је $\frac{PA}{PQ}=\mathrm{tg}30^\circ=\frac{1}{3}\sqrt{3}$, а $PA=\frac{1}{2}|(0,1,1)|=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, дакле $Q=P+t(2,-1,1)$ и $PQ=\frac{1}{2}\sqrt{6}$, одакле налазимо $t=\pm\frac{1}{2}$ и $Q=Q_1=(0,-2,3)$ или $Q=Q_2=(-2,-1,2)$. Тражене праве су $q_1=AQ_1=(-1,-1,3)+s(1,-1,0)$ и $q_2=AQ_2=(-1,-1,3)+s(1,0,1)$.

13. Одредити праву која сече праве $a(\frac{x-1}{2}=y=z)$ и $b(x=y=\frac{1-z}{2})$ и нормална је на обе.

    Решење. Једначине правих a и b можемо написати као $a=(1+2t,t,t)=(1,0,0)+t\vec{a}$ и $b=(s,s,1-2s)=(0,0,1)+s\vec{b}$, где је $\vec{a}=(2,1,1)$ и $\vec{b}=(1,1,-2)$. Означимо тражену праву са p, а њен вектор правца са $\vec{p}$. Како је $\vec{p}\perp\vec{a}$ и $\vec{p}\perp\vec{b}$, имамо $\vec{p}=\vec{a}\times\vec{b}=(-3,5,1)$.

    Сада посматрајмо раван π која садржи праве a и p. Тачку $M=b\cap p$ ћемо добити као тачку пресека b и π. Вектор $\vec{n}$ нормале на раван π је $\vec{a}\times\vec{p}=(2,1,1)\times(-3,5,1)=(-4,-5,13)$. Према томе, једначина равни π је облика $-4x-5y+13z=D$. Како тачка $A=(1,0,0)$ лежи на a, а самим тим и на π, одавде добијамо $D=-4\cdot1-5\cdot0+13\cdot0=-4$, дакле $\pi(-4x-5y+13z=-4)$.

    Како је $M=b\cap\pi=(s,s,1-2s)$ за неко s, убацивањем у једначину π добијамо $-4=-4s-5s+13(1-2s)=-35s+13$, одакле је $s=\frac{17}{35}$ и $M(\frac{17}{35},\frac{17}{35},\frac{1}{35})$. Најзад, $p=M+t\vec{p}=(\frac{17}{35},\frac{17}{35},\frac{1}{35})+t(-3,5,1)$, $t\in\mathbb{R}$.

14. Наћи раван паралелну правим $p(\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-1})$ и $q(\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+4}{0})$ и једнако удаљену од њих.

    Решење. Праве можемо записати у параметарском облику: $p:(x,y,z)=(2,4,-1)+t(3,1,-1)$ и $q:(x,y,z)=(-3,1,-4)+t(1,-2,0)$. За $t=0$ и $t=1$ добијамо тачке $P_1(2,4,-1)$ и $P_2(5,5,-2)$ на p и тачке $Q_1(-3,1,-4)$ и $Q_2(-2,-1,-4)$ на q. Тражена раван ρ пролази кроз средишта дужи P_1Q_1, P_1Q_2 и P_2Q_1, а то су редом тачке $A(-\frac{1}{2},\frac{5}{2},-\frac{5}{2})$, $B(0,\frac{3}{2},-\frac{5}{2})$ и $C(1,3,-3)$.

    Нормала $\vec{n}$ равни ρ је колинеарна са $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\frac{1}{2},-1,0)\times(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(2,1,7)$, па ρ има једначину облика $2x+y+7z=d$. Најзад, уврштивањем тачке C у ову једначину налазимо $d=-16$, па је одговор $2x+y+7z+16=0$.

15. Одредити праву која пролази кроз тачку $A(1,0,-1)$ и сече праве $p(\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1})$ и $q(\frac{x+1}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-3}{0})$.

   Решење. Означимо тражену праву са r. Она се налази у пресеку равни α и β, где α садржи праве p и r, а β садржи праве q и r.

   Праве p и q редом пролазе кроз тачке $P(2,1,-2)$ и $Q(-1,-4,3)$ и имају векторе правца $\vec{p}=(2,3,1)$ и $\vec{q}=(1,-2,0)$. Раван α је одређена тачком A и правом p. Њен вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ је нормалан на векторе $\overrightarrow{AP}=(1,1,-1)$ и $\vec{p}$, па је колинеаран са вектором $\overrightarrow{AP}\times\vec{p}=(4,-3,1)$. Слично, вектор нормале $\vec{n}_\beta$ равни β је колинеаран са $\overrightarrow{AQ}\times\vec{q}=(-2,-4,4)\times(1,-2,0)=4(2,1,2)$. Можемо узети $\vec{n}_\alpha=(4,-3,1)$ и $\vec{n}_\beta=(2,1,2)$.

   Вектор правца праве r је нормалан на $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$, па је колинеаран са вектором $\vec{n}_\alpha\times\vec{n}_\beta=(-7,-6,10)$. Према томе, права r је дата једначином $(x,y,z)=(1,0,-1)+t(-7,-6,10)$, $t\in\mathbb{R}$.

16. Дате су праве $p(x=\frac{y}{2}=\frac{1-z}{3})$, $q(y=\frac{z}{2}=\frac{1-x}{3})$, $r(z=\frac{x}{2}=\frac{1-y}{3})$ и $s(x=y=z)$. Одредити праву која сече све четири праве, ако постоји.

   Решење. Нека је тражена права ℓ и нека она сече праву s у тачки $A(a,a,a)$. Права p има вектор правца $\vec{p}=(1,2,-3)$ и пролази кроз тачку $P(0,0,1)$. Права ℓ лежи у равни π која садржи тачку A и праву p, а њена нормала је $\vec{n}_\pi=\overrightarrow{P_1A}\times\vec{p}=(-5a+2,4a-1,a)$. Слично, праву ℓ садрже и равни θ и ρ које пролазе кроз A и садрже редом праве q и r, а њихове нормале су $\vec{n}_\theta=(a,-5a+2,4a-1)$ и $\vec{n}_\rho=(4a-1,a,-5a+2)$.

   Пошто су све три нормале $\vec{n}_\pi$, $\vec{n}_\theta$ и $\vec{n}_\rho$ нормалне на праву s, оне су копланарне, па је $0=[\vec{n}_\pi,\vec{n}_\theta,\vec{n}_\rho]=7(3a-1)^2$. Следи да је $a=\frac{1}{3}$. Сада налазимо $\vec{n}_\pi=\vec{n}_\theta=\vec{n}_\rho=\frac{1}{3}(1,1,1)$, па се равни π, θ и ρ поклапају и имају једначину $x+y+z=1$.

   Решење је било која права која лежи у овој равни и садржи тачку $A(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$: то су све праве облика $\ell:(x,y,z)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})+t(b,c,d)$, где је $b+c+d=1$.

Задаци за вежбу

17. Одредити тачку симетричну тачки $A(1,0,3)$ у односу на раван $\pi(x+y+z=1)$.
18. Наћи једначину пресечне праве двеју равни $\pi(2x-3y+z=1)$ и $\rho(-x+2y+2z=5)$.
19. Одредити раван која садржи тачку $(2,-2,1)$ и нормална је на равни $3x+y=5$ и $3y+z=8$.
20. Одредити раван која садржи тачку $A(1,0,2)$ и паралелна је правим $p(x=y=-z)$ и $q(x+1=2y=3z-1)$.
21. Наћи праву која пролази кроз тачку $O(0,0,0)$ и сече праве $p(x=\frac{y-1}{2}=1-z)$ и $q(\frac{x-3}{2}=y+1=z-2)$.
22. Наћи раван која садржи праву $2x=y=1-z$ и нормална је на раван $x+3y-2z=3$.
23. Наћи ортогоналну пројекцију праве $p:(0,0,1)+t(-1,1,1)$ на раван $-2x+y+3z=9$.
24. Одредити праву симетричну правој $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}$ у односу на раван $x+2y+3z=4$.
25. Одредити праву која лежи у равни $\pi(3x-y-z=1)$ и сече праву $p(x+2z=0,y=1)$ под правим углом.

Решења

17. $(-1,-2,1)$.
18. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{5}=2-z$.
    Напомена. Ова једначина није јединствена. Осим тога, права се може задати и параметарски, нпр. као $(1,1,2)+t(8,5,-1)$.
19. $x-3y+9z=5$.

20. $5x - 8y - 3z + 1 = 0$.

21. $x = \frac{y-1}{4} = z - 1$, или параметарски $(0, 1, 1) + t(1, 4, 1)$.

22. $2x + z = 1$.

23. $(2, 0, 3) + t(13, 5, -10)$, тј. $\frac{x-2}{13} = \frac{y}{5} = \frac{z-3}{-10}$.

24. $(-1, 1, 2) + t(1, -4, 2)$.

25. $(\frac{4}{7}, 1, -\frac{2}{7}) + t(1, 1, 2)$.