Изводи

Математика 1 - лекција 6

Душан Ђукић

- ◦ Први извод функције f у тачки a је $f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, ако овај лимес постоји.
- • Правила диференцирања: $(c \cdot f)' = cf'$, $(f+g)' = f'+g'$, $(fg)' = f'g+fg'$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$, $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.
- ◦ Изводе вишег реда $(f'', f''', f^{(4)}, \dots)$ уводимо индуктивно: n-ти извод је извод $(n-1)$-тог извода, дакле $f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$, $f^{(4)} = (f''')'$ итд.
- ◦ k-ти диференцијал функције f је $d^k f(x) = f^{(k)}(x)dx^k$.

1. Наћи *по дефиницији* извод функције $f(x) = \frac{1}{x}$.

Решење. По дефиницији је $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(\frac{a-x}{ax})}{x-a} = -\lim_{x\to a} \frac{1}{ax} = -\frac{1}{a^2}$. Дакле, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

2. Наћи изводе следећих функција:

(а) $f(x) = x(x-1)(x-3)$; (б) $f(x) = e^x + x^e + e$; (в) $f(x) = 2x^2 \ln x$; (г) $f(x) = \dfrac{x \sin x}{\cos^2 x}$;

(д) $f(x) = \ln(2x^2+1)$; (ђ) $f(x) = x^2 e^{x^2+x}$; (е) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$; (ж) $f(x) = x^x$.

Решење. (а) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$; (б) $f'(x) = e^x + ex^{e-1}$; (в) $f'(x) = 2x(2\ln x + 1)$;

(г) $f'(x) = \dfrac{x + x\sin^2 x + \sin x \cos x}{\cos^3 x}$; (д) $f'(x) = \dfrac{4x}{2x^2+1}$; (ђ) $f'(x) = (2x^3 + x^2 + 2x)e^{x^2+x}$;

(е) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(2x+1)(x^2+x)^{-3/2}$; (ж) $f'(x) = (e^{x\ln x})' = x^x(\ln x + 1)$.

3. Одредити изводе функција: (а) $f(x) = |x|$; (б) $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$; (в) $f(x) = \arcsin \dfrac{2|x|}{1+x^2}$.

Решење. (а) $f'(x) = \operatorname{sgn} x = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ за $x \neq 0$. У $x = 0$ нема извода.

(б) $f(x) = |x^2 - 1|$ и $f'(x) = 2x \operatorname{sgn}(x^2-1)$;

(в) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{2|x|}{1+x^2})^2}} \cdot \left(\dfrac{2|x|}{1+x^2}\right)' = 2\dfrac{1+x^2}{|1-x^2|} \cdot \dfrac{|x|'(1+x^2) - |x|(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$. Након мало сређивања ово ће се свести на $f'(x) = \dfrac{2\operatorname{sgn}(x(1-x^2))}{1+x^2}$.

4. Одредити $f'(x)$ ако је $f(x) = 2^{-\frac{\sin \ln 2x}{1+\cos^2 3x}} \cdot (x-1)^2$. Немојте да погрешите у рачуну.

Решење. Како је $(\sin \ln 2x)' = \cos \ln 2x \cdot (\ln 2x)' = \dfrac{\cos \ln 2x}{x}$ и $(1+\cos^2 3x)' = 2\cos 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = -3\sin 6x$, имамо $\left(-\dfrac{\sin \ln 2x}{1+\cos^2 3x}\right)' = -\dfrac{(1+\cos^2 3x)\cos \ln 2x + 3x \sin 6x \sin \ln 2x}{x(1+\cos^2 3x)^2}$. Даље је $\left(2^{-\frac{\sin \ln 2x}{1+\cos^2 3x}}\right)' = -2^{-\frac{\sin \ln 2x}{1+\cos^2 3x}} \cdot \ln 2 \cdot \dfrac{(1+\cos^2 3x)\cos \ln 2x + 3x \sin 6x \sin \ln 2x}{x(1+\cos^2 3x)^2}$, и најзад

$$f'(x) = 2^{-\frac{\sin \ln 2x}{1+\cos^2 3x}} \left[2(x-1) - (x-1)^2 \ln 2 \cdot \frac{(1+\cos^2 3x)\cos \ln 2x + 3x \sin 6x \sin \ln 2x}{x(1+\cos^2 3x)^2}\right].$$

5. Наћи први и други диференцијал функције $f(x) = e^x \sin 2x$.

Решење. $df = f'(x)dx = e^x(2\cos 2x + \sin 2x)$ и $d^2f = f''(x)dx^2 = e^x(4\cos 2x - 3\sin 2x)dx^2$.

6. Наћи трећи извод функције $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Решење. Први извод је $f'(x) = x(x^2-1)^{-1/2}$, други извод $f''(x) = -(x^2-1)^{-3/2}$, а трећи $f'''(x) = 3x(x^2-1)^{-5/2}$.

7. Наћи 100-ти извод функције $f(x) = xe^x$.

Решење. Имамо $f'(x) = (x+1)e^x$, $f''(x) = (x+2)e^x$, итд. Индукцијом добијамо $f^{(n)} = (x+n)e^x$: заиста, ако је $f^{(k)} = (x+k)e^x$ за неко k, онда је $f^{(k+1)} = ((x+k)e^x)' = (x+k+1)e^x$. Дакле, $f^{(100)}(x) = (x+100)e^x$.

8. Наћи једначину тангенте на график функције $f(x) = x^2e^{2x-2} + 1$ у тачки у којој је $x = 1$.

Решење. Нагиб тангенте је $f'(1)$, где је $f'(x) = 2(x^2+x)e^{2x-2}$. Имамо $f(1) = 2$ и $f'(1) = 4$, па је тангента $y - 2 = 4(x-1)$, тј. $y = 4x - 2$.

9. У којој тачки је тангента на график функције $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x} + 4\arcsin x$ паралелна правој $y = -2x$?

Решење. Имамо $y'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1-x^2}$. Тражимо x за које је $y'(x) = -2$. Ако означимо $(1-x^2)^{-1/2} = t$, добијамо једначину $4t - 2t^2 + 2 = 0$. Одавде је $t = 1 \pm \sqrt{2}$, при чему само $t = 1 + \sqrt{2}$ долази у обзир; тада је $x = \pm\sqrt{2\sqrt{2} - 2}$.

10. Функција $y = y(x)$ је задата параметарски: $(x, y) = (t^3 + t, t^2 + 2)$. Израчунати $y'(2)$.

Решење. Имамо $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{2t}{3t^2+1}$. Ако је $x = t^3 + t = 2$, онда је $0 = t^3 + t - 2 = (t-1)(t^2+t+2)$, па је $t = 1$. Следи да је $y'(2) = \frac{2\cdot 1}{3\cdot 1^2 + 1} = \frac{1}{2}$.

11. Нека је $f(x) = x + \sin x$ и нека је $g = f^{-1}$ (инверзна функција). Одредити $g'(0)$ и $g''(0)$.

Решење. Функција f је растућа јер је $f'(x) = 1 + \cos x \geqslant 0$. Следи да је $x = 0$ једино решење једначине $y = f(x) = 0$.

Имамо $g'(y) = \dfrac{dg(y)}{dy} = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{dy/dx} = \dfrac{1}{1+\cos x}$, те је $g'(0) = \dfrac{1}{1+\cos 0} = \dfrac{1}{2}$.

Даље, $g''(y) = \dfrac{dg'(y)}{dy} = \dfrac{dg'(y)/dx}{dy/dx} = \dfrac{d(\frac{1}{1+\cos x})/dx}{dy/dx} = \dfrac{(\frac{1}{1+\cos x})'}{f'(x)} = \dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$, те је $g''(0) = 0$.

12. Функција f је дата изразом $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ за $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Израчунати $f'(0)$, ако постоји.

Решење. Извод функције f је $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, али овај израз није дефинисан у $x = 0$.

Извод у нули тражимо по дефиницији: $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ јер $x \to 0$ и $|\sin\frac{1}{x}| \leqslant 1$.