Испитивање тока функције

Математика 1 - лекција 7

Душан Ђукић

Ако се не нагласи другачије, испитивање тока функције се састоји од следећих тачака:

1° Домен функције, тј. њена област дефинисаности;
Нуле функције;
Знак - интервали на којима је функција позитивна, односно негативна;
Посебна својства функције: да ли је парна, непарна и/или периодична;
Асимптоте: вертикалне (може их бити више) и косе/хоризонталне (највише две);

2° Први извод функције и његова област дефинисаности;
Интервали монотоности, тј. где је функција растућа, односно опадајућа;
Тачке локалних екстремума - минимума и максимума;

3° Други извод функције и његова област дефинисаности;
Интервали конвексности и конкавности функције;
Превојне тачке.

1. Наћи локалне и глобалне екстремуме функције $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$.

   Решење. Извод функције f је $f'(x) = -\frac{3x^2-2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$ и једнак је нули у $x = \frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$. При том је $f'(x) > 0$ за $x \in (\frac{1-\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3})$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{10}}{3}) \cup (\frac{1+\sqrt{10}}{3}, +\infty)$, па у $x = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$ имамо локални минимум, а у $x = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$ локални максимум. Како $f(x) \to +\infty$ за $x \to 1-$ и $f(x) \to -\infty$ за $x \to 1+$, глобални минимум и максимум су редом $-\infty$ и $+\infty$ и не достижу се.

2. Испитати монотоност и одредити локалне екстремуме функције $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(1 - \sqrt{x})$.

   Решење. Извод је $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{5}{6}x^{-1/6}$ и једнак је 0 за $x = (\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$. На $(0, \frac{4}{25})$ f расте, на $(\frac{4}{25}, 1)$ опада, и у $x = \frac{4}{25}$ има локални максимум.

3. Испитати ток функције $f(x) = \ln(\frac{3x+1}{3x-4})$ и скицирати њен график.

   Решење. Функција је дефинисана тамо где је $\frac{3x+1}{3x-4} > 0$, тј. тамо где су $3x+1$ и $3x-4$ оба позитивна или оба негативна, па је домен функције $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$. Ако је $f(x) = 0$, онда је $\frac{3x+1}{3x-4} = 1$ што нема решења, дакле функција f нема нула. Даље, $f(x) > 0$ ако је $\frac{3x+1}{3x-4} > 1$, тј. $\frac{3x+1}{3x-4} - 1 = \frac{5}{3x-4} > 0$, што важи за $x > \frac{4}{3}$; с друге стране, за $x < -\frac{1}{3}$ је $f(x) < 0$.

   Праве $x = -\frac{1}{3}$ и $x = \frac{4}{3}$ су вертикалне асимптоте јер је $\lim_{x\to-\frac{1}{3}-} f(x) = \lim_{z\to 0} \ln z = -\infty$ и $\lim_{x\to\frac{4}{3}} f(x) = \lim_{z\to+\infty} \ln z = \infty$. Осим тога, за $x \to \pm\infty$ важи $\frac{3x+1}{3x-4} = 1$, па је $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ln 1 = 0$, тј. права $y = 0$ је (хоризонтална) асимптота за $x \to \pm\infty$.

   Извод функције f је $f'(x) = (\ln|3x+1| - \ln|3x-4|)' = \frac{3}{3x+1} - \frac{3}{3x-4} = -\frac{15}{(3x+1)(3x-4)}$. За све x у домену функције је $(3x+1)(3x-4) > 0$, па је $f'(x) < 0$ и функција f опада у целом домену. Локалних екстремума нема.

   Други извод је $f''(x) = (\frac{3}{3x+1} - \frac{3}{3x-4})' = -\frac{9}{(3x+1)^2} + \frac{9}{(3x-4)^2} = \frac{9((3x+1)^2-(3x-4)^2)}{(3x+1)^2(3x-4)^2} = \frac{135(2x-1)}{(3x+1)^2(3x-4)^2}$. За $x < -\frac{1}{3}$ је $f''(x) < 0$ и функција је конкавна, а за $x > \frac{4}{3}$ је $f''(x) > 0$ и функција је конвексна; нема превојних тачака.

4. Испитати ток функције $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

   Решење. Функција је дефинисана ако је $\frac{x}{x-1} \geqslant 0$, дакле домен је $D = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$. Једина нула функција је $x = 0$; у остатку домена је $f(x) > 0$. Функција није парна нити непарна. Права $x = 1$ је вертикална асимптота, али права $x = 0$ то није јер је $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Такође, за $x \to \pm\infty$ је $\lim \frac{x}{x-1} = 1$ и $\lim f(x) = 1$, па је права $y = 1$ (хоризонтална) асимотота.

Први и други извод функције су $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x(x-1)^3}}$ и $f''(x) = \frac{4x-1}{4\sqrt{x^3(x-1)^5}}$. Први извод је дефинисан и негативан за све $x \in D \setminus \{0\}$, па нема тачака локалног екстремума. За $x < 0$ је $f''(x) < 0$ и функција је конкавна, а за $x > 1$ је $f''(x) > 0$ је $f''(x) > 0$ и функција је конвексна; нема превојних тачака.

5. Испитати ток функције $f(x) = \sqrt[3]{|x|^3 - 12x}$.

Решење. Домен f је цео скуп $\mathbb{R}$, а нуле су $x \in \{0, \sqrt{12}\}$ ($x = -\sqrt{12}$ није нула!); $f(x) > 0$ за $x < 0$ и $x > \sqrt{12}$, и $f(x) < 0$ за $0 < x < \sqrt{12}$.

Вертикалних асимптота нема; нађимо косе, односно хоризонталне: за $x \to +\infty$, $\lim \frac{f(x)}{x} = 1$ и $\lim(f(x) - x) = \lim(\sqrt[3]{x^3 - 12x} - x) = \lim_{y=\frac{1}{x}\to 0+}(\sqrt[3]{\frac{1}{y^3} - \frac{12}{y}} - \frac{1}{y}) = \lim_{y\to 0+} \frac{\sqrt[3]{1-12y^2}-1}{y} = 0$ по Лопиталовом правилу, што нам даје асимптоту $y = x$; слично, за $x \to -\infty$, асимптота је $y = -x$.

Извод функције f је $f'(x) = (x^3\mathrm{sgn}(x) - 12x)^{-2/3}(x^2\mathrm{sgn}(x) - 4)$, а други извод $f''(x) = 8(x^3\mathrm{sgn}(x) - 12x)^{-5/3}(-x^2\mathrm{sgn}(x) - 4)$; изводи f' и f'' нису дефинисани у $x = 0$ и $x = \sqrt{12}$. Једина нула f' је $x = 2$, а једина нула f'' је $x = -2$. Видимо да f опада на $(-\infty, 2)$ и расте на $(2, \infty)$, и да је f конвексна на $(-\infty, -2)$ и конкавна на $(-2, 0) \cup (0, \sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, \infty)$. У $x = 2$ функција f достиже локални минимум, а у $x = -2$ има превојну тачку.

6. Испитати ток функције $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ и скицирати њен график.

Решење. Домен функције $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ је домен експонента, тј. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Нема нула и увек је позитивна. За $x \to \pm(1+)$ има вертикалне асимптоте $x = \pm 1$, а за $x \to \pm\infty$ има хоризонталну асимптоту $y = 1$. Приметимо и да за $x \to \pm(1-)$ имамо $f(x) \to 0$.

Извод је $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}}$, што је супротног знака од x: f је опадајућа за $0 < x < 1$ и $x > 1$, а растућа за $-1 < x < 0$ и $x < -1$. У тачки $x = 0$ имамо локални максимум.

Други извод је $f''(x) = \frac{6x^4-2}{(x^2-1)^4} e^{\frac{1}{x^2-1}}$; $f''(x) < 0$ и f је конкавна за $x \in (-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}})$, а $f''(x) > 0$ и f је конвексна ван тог интервала. Превојне тачке су $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.

7. Испитати ток функције $f(x) = \frac{\ln(x+1)-1}{\sqrt{x+1}}$ и скицирати њен график.

Решење. Домен је интервал $(-1, +\infty)$; једина нула је $x = e - 1$; $f(x) < 0$ за $x \in (-1, e - 1)$ и $f(x) > 0$ за $x \in (e - 1, \infty)$; није парна, непарна или периодична. Има вертикалну асимптоту $x = -1$ (јер је $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$) и хоризонталну асимптоту $y = 0$ (јер је $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$).

Извод: $f'(x) = \frac{3-\ln(x+1)}{2(x+1)^{3/2}}$. Функција f расте на $(-1, e^3 - 1)$, опада на $(e^3 - 1, \infty)$, и достиже локални максимум за $x = e^3 - 1$.

Други извод: $f''(x) = \frac{3\ln(x+1)-11}{4(x+1)^{5/2}}$. Функција f је конкавна на $(-1, e^{11/3} - 1)$, конвексна на $(e^{11/3} - 1, \infty)$ и има превојну тачку $x = e^{11/3} - 1$.

8. Испитати ток функције $f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$ и скицирати њен график.

Решење. Домен је $(0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$; једина нула је $x = e$; $f(x) > 0$ за $x \in (\frac{1}{e}, e)$ и $f(x) < 0$ за $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, \infty)$; није парна, непарна или периодична; има вертикалну асимптоту у $x = \frac{1}{e}$ и хоризонталну $y = -1$, а у околини $x = 0$ нема асимптоте јер је $\lim_{x\to 0+} f(x) = -1$.

Извод је $f'(x) = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$ и негативан је на целом домену; функција опада на $(0, \frac{1}{e})$ и $(\frac{1}{e}, \infty)$ и нема локалне екстремуме.

Други извод је $f''(x) = \frac{2(3+\ln x)}{x^2(1+\ln x)^3}$; $f''(x) > 0$ и f је конвексна на $(\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e})$, а $f''(x) < 0$ и f је конкавна на $(0, \frac{1}{e^3}) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$; $x = \frac{1}{e^3}$ је превојна тачка.

9. Испитати ток функције $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 + 2}{x}}$ и скицирати њен график.

Решење. Домен је $(-\infty, -\sqrt[3]{2}] \cup (0, \infty)$; једина нула је $x = -\sqrt[3]{2}$; $f(x) \geqslant 0$ за све x; није парна, непарна или периодична; има вертикалну асимптоту $x = 0$ и косе асимптоте $y = x$ ($x \to \infty$) и $y = -x$ ($x \to -\infty$).

Извод је $f''(x) = \frac{x^3+1}{x^2} \cdot \left(\frac{x^3+2}{x}\right)^{-1/2}$, те је $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{2}] \cup (0,1)$ (функција опада) и $f'(x) > 0$ за $x \in (1, \infty)$ (функција расте). У $x = 1$ има локални минимум.

Други извод је $f''(x) = \frac{6x^3+3}{x^4} \cdot \left(\frac{x^3+2}{x}\right)^{-3/2}$ и његова једина реална нула $x = -1/\sqrt[3]{2}$, је ван домена. Притом је $f''(x) < 0$ за $x \leqslant -\sqrt[3]{2}$ (функција је конкавна) и $f''(x) > 0$ за $x > 0$ (функција је конвексна); превојних тачака нема.

10. Испитати ток функције $f(x) = 3\ln x^4 + 4\ln(1-x^3)$ и скицирати њен график.

Решење. Домен је $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.
Како је $f(x) = \ln x^{12}(1-x^3)^4$, једнакост $f(x) = 0$ је еквивалентна са $x^{12}(1-x^3)^4 = 1$, тј. $x^3(1-x^3) = \pm 1$; $x^3(1-x^3) = 1$ нема решења, док $x^3(1-x^3) = -1$ има решења $x = \sqrt[3]{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$, при чему је $x = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ван домена; дакле, једина нула је $x = c = \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. Јасно је да f мења знак само у $x = c$, па је $f(x) > 0$ за $x < c$ и $f(x) < 0$ за $x > c$.
Функција f није парна, непарна или периодична. Има вертикалну асимптоту у $x = 0$ и слева у $x = 1$, а нема косих или хоризонталних асимптота.

Извод је $f'(x) = \frac{12(1-2x^3)}{x(1-x^3)}$ и једнак је нули само за $x = \sqrt[3]{1/2}$. Зато је $f'(x) < 0$ и $f(x) \uparrow$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \sqrt[3]{1/2})$, а $f'(x) > 0$ и $f(x) \downarrow$ за $x \in (\sqrt[3]{1/2}, 1)$. У $x = \sqrt[3]{1/2}$ има локални максимум.

Други извод је $f''(x) = -\frac{12(1+2x^6)}{x^2(1-x^3)^2}$ и увек је негативан, тј. f је конкавна на целом домену.

11. Испитати ток функције $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^{2/3}}{|x+1|}}$ и скицирати њен график.

Решење. Домен је $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Функција је увек ненегативна и њена једина нула је $x = 0$. Није парна, непарна или периодична. Има вертикалну асимптоту $x = -1$ и хоризонталну $y = 0$.

Извод је $f'(x) = \frac{(2-x)\operatorname{sgn}(x(x+1))}{6|x|^{2/3}|x+1|^{3/2}}$; дефинисан је за $x \notin \{-1, 0\}$ и једина његова нула је $x = 2$. Пошто је $f'(x) > 0$ и $f \uparrow$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$, и $f'(x) < 0$ и $f \downarrow$ за $x \in (-1, 0) \cup (2, \infty)$, у тачки $x = 2$ функција f има локални максимум, а у $x = 0$ локални минимум.

Други извод је $f''(x) = \frac{7x^2-28x-8}{36|x|^{5/3}|x+1|^{5/2}}$. Његове нуле су $x_{1,2} = 2 \pm \frac{6}{\sqrt{7}}$ и то су превојне тачке: $f''(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 2 - \frac{6}{\sqrt{7}}) \cup (2 + \frac{6}{\sqrt{7}}, \infty) \setminus \{-1\}$ и $f''(x) < 0$ за $x \in (2 - \frac{6}{\sqrt{7}}, 2 + \frac{6}{\sqrt{7}}) \setminus \{0\}$.

12. Испитати ток функције $f(x) = \dfrac{4x-7}{3x^2+3x+7}$ и скицирати њен график.

Решење. Пошто је $3x^2 + 3x + 7$ увек позитивно, домен је цео скуп $\mathbb{R}$. Једина нула функције је $x = \frac{7}{4}$, а $f(x) < 0$ за $x < \frac{7}{4}$ и $f(x) > 0$ за $x > \frac{7}{4}$. Функција није парна, непарна или периодична. Права $x = 0$ је вертикална асимптота.

Извод је $f'(x) = \frac{-12x^2+42x+49}{(3x^2+3x+7)^2}$, а његове нуле су $\frac{7(3\pm\sqrt{21})}{12}$. За $\frac{7(3-\sqrt{21})}{12} < x < \frac{7(3+\sqrt{21})}{12}$ је $f'(x) > 0$ (f опада), а за $x < \frac{7(3-\sqrt{21})}{12}$ или $x > \frac{7(3+\sqrt{21})}{12}$ је $f''(x) > 0$ (f расте). Тачка $x = \frac{7(3-\sqrt{21})}{12}$ је локални минимум, а $x = \frac{7(3+\sqrt{21})}{12}$ локални максимум.

Други извод је $f''(x) = \frac{18x(4x^2-21x-49)}{(3x^2+3x+7)^3}$; његове нуле су $x_1 = -\frac{7}{4}$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 7$ и то су превојне тачке. На $(-\infty, -\frac{7}{4}) \cup (0, 7)$ функција је конкавна, а на $(-\frac{7}{4}, 0) \cup (7, \infty)$ конвексна.

13. Испитати ток функције $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^2-1}$ и скицирати њен график.

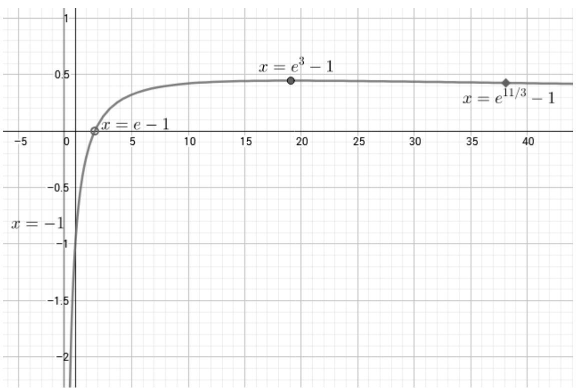
Решење. Домен је $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Једина нула функције је $x = 0$; $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, а $f(x) > 0$ за $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$. Функција је непарна. Праве $x = -1$ и $x = 1$ су вертикалне асимптоте. Осим тога, $y = x$ је коса асимптота јер је $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ и $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$.

Извод је $f'(x) = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$ и има две реалне нуле: $x = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$. Тако за $x < -\sqrt{2+\sqrt{5}}$ и $x > \sqrt{2+\sqrt{5}}$ функција f расте, а за $-\sqrt{2+\sqrt{5}} < x < \sqrt{2+\sqrt{5}}$ опада; у тачки $x = -\sqrt{2+\sqrt{5}}$ има локални максимум, а у $x = \sqrt{2+\sqrt{5}}$ локални минимум.

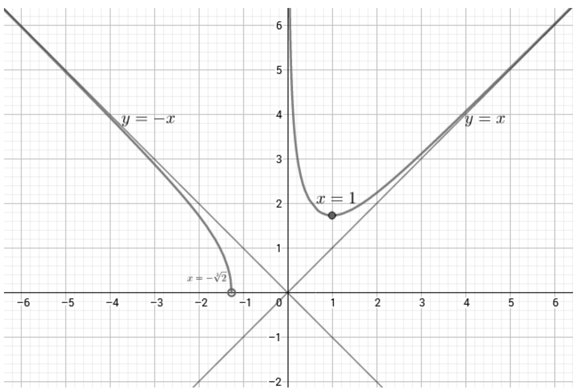
Други извод је $f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$; позитиван је за $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ (f је конвексна), а негативан за $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$ (f је конкавна). Превојних тачака нема.

Испитати следеће функције и нацртати њихове графике (14-21):

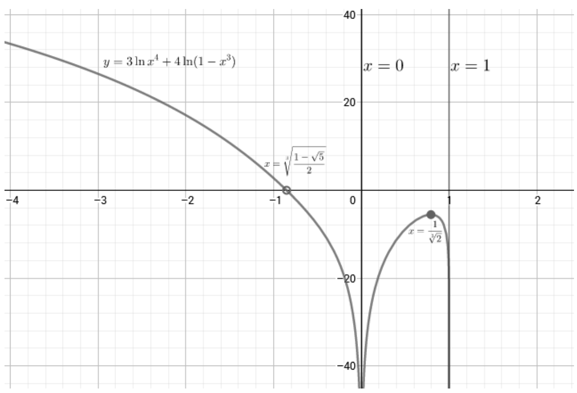
14. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3-4x}}$.
15. $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\ln^2(x+2)}$;
16. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$;
17. $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x-3}}$;
18. $f(x) = \frac{x^2}{\ln x - 1}$;
19. $f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$;
20. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;
21. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.



7. задатак



9. задатак



10. задатак