Вектори

Математика 1 - лекција 1

Душан Ђукић

Нека су дати вектори $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Нека је $\alpha = \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ угао између вектора $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

- Уводимо збир $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ и производ константом c: $c\vec{v}_1 = (cx_1, cy_1, cz_1)$.
- Вектори $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ су колинеарни ако и само ако је $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ или $\vec{v}_2 = k\vec{v}_1$ за неку константу c, тј. $x_1 : y_1 : z_1 = x_2 : y_2 : z_2$.
- *Дужина* вектора $\vec{v}_1$ је $|v_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.
- *Скаларни производ* је $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos\alpha$.
  Важи $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
  Производ $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ је једнак 0 ако и само ако је $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ (или је неки од вектора нула).
- Угао α је дат изразом $\cos\alpha = \dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}$.
- Пројекција вектора $\vec{v}_1$ на правац вектора $\vec{v}_2$ једнака је $Pr_{\vec{v}_2}(\vec{v}_1) = \dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_2|^2}\vec{v}_2$.
- *Векторски производ* $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ је вектор нормалан на векторе $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, дужине $|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \sin\alpha$ (једнаке површини паралелограма који они разапињу), оријентисан тако да је, посматрано с његовог врха, $\vec{v}_2$ лево од $\vec{v}_1$.
  Важи $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1, z_1x_2 - z_2x_1, x_1y_2 - x_2y_1)$.
  Вектор $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ је једнак $\vec{0} = (0, 0, 0)$ ако и само ако су вектори $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ колинеарни.
- *Мешовити производ* вектора $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ је $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3$. Његова апсолутна вредност се не мења пермутовањем вектора и једнака је запремини паралелограма разапетог овим векторима.
  Важи $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.
  Мешовити производ вектора $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ је једнак 0 ако и само ако су они компланарни.

1. У троуглу ABC, тачка D је средиште странице AB, E је средиште дужи CD, а F тачка на страници BCтаква да је $BF : FC = 2 : 1$. Доказати да су тачке A, E и F колинеарне.

   Решење. Означимо $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Тада је $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b}$ и $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. Такође је $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b})$ и $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$. Видимо да је $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AE}$, дакле, вектори AE и AF су колинеарни.

2. Ако је $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \frac{3}{2}$, израчунати дужину вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

   Решење. По дефиницији скаларног производа је $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}$. Како је $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$ и $\vec{b} \cdot \vec{b} = 9$, добијамо $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4 + 9 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 16$, тј. $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$.

3. Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколинеарни вектори. Познато је да вектор $\vec{a} + 2\vec{b}$ гради једнаке углове са векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Одредити однос $|\vec{a}|/|\vec{b}|$.

Решење. Означимо $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$. Како је $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$, имамо $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}+2\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}+2\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|+2|\vec{b}|\cos\varphi}{|\vec{a}+2\vec{b}|}$ и $\cos\sphericalangle(\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}+2\vec{b})}{|\vec{b}|\cdot|\vec{a}+2\vec{b}|} = \frac{2|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{a}+2\vec{b}|} = \frac{2|\vec{b}|+|\vec{a}|\cos\varphi}{|\vec{a}+2\vec{b}|}$. Из $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{a} + 2\vec{b}) = \cos\sphericalangle(\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b})$ добијамо $|\vec{a}| + 2|\vec{b}|\cos\varphi = 2|\vec{b}| + |\vec{a}|\cos\varphi$, тј. $|\vec{a}|(1 - \cos\varphi) = 2|\vec{b}|(1 - \cos\varphi)$. Пошто вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нису колинеарни, угао φ није нула, па можемо да скратимо $1 - \cos\varphi \neq 0$, те нам остаје $|\vec{a}|/|\vec{b}| = 2$.

4. Ако је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, изразити $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})$ у функцији од $\vec{c}$.

   Решење. Имамо $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) = 6\vec{a} \times \vec{a} + 6\vec{b} \times \vec{b} + 4\vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a}$. Сада треба имати у виду да је $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$ и $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{c}$, тако да је $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) = -5\vec{c}$.

5. Ако су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вектори дужине 1 који припадају истој равни, израчунати $[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c}]$.

   Решење. Тражени мешовити производ представља запремину паралелепипеда одређеног векторима $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c}$. Међутим, ова три вектора су нормална на раван којој припадају вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и према томе су колинеарни, па одређују "паралелепипед" запремине 0.

6. За које вредности реалних параметара a и b су вектори $\vec{a} = (1, a, a^2)$, $\vec{b} = (1, b, b^2)$ и $\vec{c} = (1, 2, 3)$ линеарно зависни?

   Решење. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ су линеарни зависни ако и само ако је $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. Како је $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3b + ab^2 + 2a^2 - 2b^2 - 3a - a^2 b = (b - a)(ab - 2a - 2b + 3)$, одговор је $a = b$ или $ab - 2a - 2b + 3 = 0$.

7. Дати су вектори $\vec{a} = (2, -1, 2)$, $\vec{b} = (0, 3, -2)$ и $\vec{c} = (-1, 0, 1)$. Израчунати $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, $Pr_{\vec{b}}(\vec{a})$, $\vec{a} \times \vec{b}$ и $[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$.

   Решење. Прво налазимо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = -7$, $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$ и $|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$. Сада је $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \arccos\frac{-7}{3\sqrt{13}}$ и $Pr_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = -\frac{7}{13}(0, 3, -2)$. Даље је $\vec{a} \times \vec{b} = (2, -1, 2) \times (0, 3, -2) = (\left|\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right|, \left|\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right|, \left|\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right|) = (-4, 4, 6)$ и $[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(-4, 4, 6) \cdot (-1, 0, 1) = -10$.

8. Одредити векторе дужине 1 који су нормални на векторе $\vec{a} = (3, -2, 2)$ и $\vec{b} = (4, 1, 0)$.

   Решење. Вектор $\vec{a} \times \vec{b} = (\left|\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right|, \left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right|, \left|\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right|) = (-2, 8, 11)$ је нормалан на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, али није дужине 1 - његова дужина је $\sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 11^2} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21}$. Зато вектори $\pm\frac{1}{3\sqrt{21}}(-2, 8, 11)$ задовољавају услове.

9. Одредити површину троугла чија су темена $A(0, 2, 1)$, $B(-1, 3, 3)$ и $C(1, 0, 0)$.

   Решење. Површина троугла ABC је $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$, где је $\overrightarrow{AB} = (-1, 3, 3) - (0, 2, 1) = (-1, 1, 2)$ и $\overrightarrow{AC} = (1, 0, 0) - (0, 2, 1) = (1, -2, -1)$. Сада рачунамо $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 2) \times (1, -2, -1) = (\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right|, \left|\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right|, \left|\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right|) = (3, 1, 1)$ и $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$, па је $P_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$.

10. Дате су тачке $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ и $D(2, 3, 4)$. Израчунати запремину тетраедра $ABCD$.

    Решење. Пошто је $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$ и $\overrightarrow{AD} = (1, 3, 4)$, тражена запремина је једнака $\frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{4}{3}$.

11. Дате су тачке $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$ и $C(2, 1, a)$. Одредити вредност a ако је $\sphericalangle BAC = 60°$.

    Решење. Имамо $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 1, a)$ и $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot a = 4$. Како је $\frac{1}{2} = \cos\sphericalangle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|AB|\cdot|AC|} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5+a^2}}$, добијамо $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5 + a^2} = 8$, па је $5 + a^2 = \frac{64}{5}$ и одатле $a = \pm\sqrt{\frac{39}{5}}$.

12. Дате су тачке $A(4, 1, 1)$, $B(0, 2, 3)$ и $C(2, -1, 3)$. Наћи вектор висине из темена A у троуглу ABC.

Решење. Нека је A' подножје висине из тачке A у троуглу ABC. Тада је $\overrightarrow{BA'} = Pr_{BC}(\overrightarrow{BA}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|BC|^2}\overrightarrow{BC} = \frac{11}{13}(2,-3,0) = (\frac{22}{13}, -\frac{33}{13}, 0)$ јер је $\overrightarrow{BA} = (4,-1,-2)$ и $\overrightarrow{BC} = (2,-3,0)$. Вектор висине је $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = (-4,1,2) + (\frac{22}{13}, -\frac{33}{13}, 0) = (-\frac{30}{13}, -\frac{20}{13}, 2)$.

Задаци за вежбу

13. Дат је троугао ABC. Тачка D на страници AC је таква да је $AD : DC = 2 : 1$, а тачка E је средиште дужи BD. Права AE сече страницу BC у тачки F. Одредити однос $AE : EF$.
14. Ако је $|\vec{a}+\vec{b}| = 2$, $|2\vec{a}+\vec{b}| = 5$ и $|\vec{a}+2\vec{b}| = 4$, израчунати $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$.
15. Ако је $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 1$, одредити вредност $[2\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-2\vec{c}, \vec{b}]$.
16. Наћи пројекцију вектора $\vec{u} = (1,3,2)$ на $\vec{v} = (3,0,-1)$, као и пројекцију $\vec{v}$ на $\vec{u}$.
17. Одредити површину паралелограма који вектор $\vec{a} = (0,-2,3)$ чини са вектором $\vec{b}\times\vec{c}$, где је $\vec{b} = (3,-1,-1)$ и $\vec{c} = (2,3,4)$.
18. Дати су вектор $\vec{a} = (2,1,-1)$. Наћи вектор $\vec{b}$ такав да је $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ и $\vec{a}\times\vec{b} = (1,-1,1)$.
19. Одредити вредности параметара x и y тако да важи $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c}$, где је $\vec{a} = (1,x,y)$, $\vec{b} = (2,0,x+y)$ и $\vec{c} = (1,-x,2)$.
20. Наћи ортогоналну пројекцију тачке A на праву BC, где је $A(0,0,0)$, $B(2,-1,-1)$ и $C(-3,2,3)$.
21. Наћи вектор висине из темена C у троуглу ABC, где је $A(-2,1,1)$, $B(-3,2,3)$ и $C(1,3,1)$. Затим наћи површину троугла ABC.
22. Дате су тачке $A(3,1,0)$, $B(-1,1,2)$, $C(2,2,4)$ и $D(3,0,5)$. Наћи запремину тетраедра $ABCD$.

Решења

13. $AE : EF = 5 : 1$.
14. $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{11}$.
15. $[2\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-2\vec{c}, \vec{b}] = 4$.
16. $Pr_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{1}{10}\vec{v} = (\frac{3}{10}, 0, -\frac{1}{10})$ и $Pr_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{1}{14}\vec{u} = (\frac{1}{14}, \frac{3}{14}, \frac{1}{7})$.
17. $\vec{b}\times\vec{c} = (-1,-14,11)$, $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = (-20,3,2)$; површина је $\sqrt{(-20)^2+3^2+2^2} = \sqrt{413}$.
18. $\vec{b} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
19. $x = 2$, $y \in \mathbb{R}$.
20. $A'(0,3,\ 0,02,\ 0,36)$
21. $\overrightarrow{CC'} = (-\frac{17}{6}, -\frac{13}{6}, -\frac{1}{3})$, $P = \frac{1}{2}\sqrt{77}$.
22. $\overrightarrow{AB} = (-4,0,2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,1,4)$, $\overrightarrow{AD} = (0,-1,5)$, $V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{17}{3}$.