Крива као траг векторске функције

Математика 1 - лекција 9

Душан Ђукић

- *Векторска функција* $\vec{r}$ у n димензија је функција облика $\overrightarrow{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Функције x_i су *координатне функције.* Њен *траг* (или *ходограф*) је скуп свих крајева вектора $\vec{r}(t)$.

У нашем случају је обично $n = 3$ (или понекад $n = 2$), те је $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Први, други и трећи извод векторске функције $\vec{r}$ по t (по координатама: дакле, извод функције $(x(t), y(t), z(t))$ је $(x'(t), y'(t), z'(t))$) често пишемо као $\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}$, уместо $\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''$.
Нека је крива $\mathcal{C}$ траг векторске функције $\vec{r}(t)$ и $A = \vec{r}(t_0)$ тачка на њој.

- Вектори *тангенте, нормале и бинормале* у тачки A су $\vec{\tau} = \vec{\tau}(t_0) = \dfrac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$, $\vec{n} = \dfrac{\dot{\vec{\tau}}}{|\dot{\vec{\tau}}|}$ и $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$. Вектори $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ су јединични и не зависе од параметризације криве, већ само од њене оријентације. Такође важи $\vec{b} = \dfrac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}$ и $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau}$.
- *Природни триедар* је тројка вектора $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$. Његовим елементима сматрамо и три равни кроз тачку A одређене овим векторима: *оскулаторну* ($\perp \vec{b}$), *нормалну* ($\perp \vec{\tau}$) и *ректификациону* ($\perp \vec{n}$).
- *Кривина* криве у датој тачки је $K = \dfrac{|\dot{\vec{\tau}}|}{|\dot{\vec{r}}|} = \dfrac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$, а *торзија* $T = -\dfrac{\dot{\vec{b}}/\vec{n}}{|\dot{\vec{r}}|} = \dfrac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$.

  Вектори нормале и торзије су $\vec{K} = K\vec{n}$ и $\vec{T} = -T\vec{n}$.

1. Дате су три векторске функције у равни:
   (1) $r_1(t) = (t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t})$, $t > 1$; (2) $r_2(t) = (\sqrt{t^2+4}, t)$, $t > 0$; (3) $r_3(t) = (\frac{2+2t^2}{1-t^2}, \frac{4t}{1-t^2})$, $0 < t < 1$.
   Да ли је траг ових трију функција иста крива?

   Решење. Да. Све три функције одређују део хиперболе $\gamma : x = \sqrt{y^2+4}$ за $y > 0$. Заиста, важи $(t + \frac{1}{t})^2 - (t - \frac{1}{t})^2 = \sqrt{t^2+4}^2 - t^2 = (\frac{2+2t^2}{1-t^2})^2 - (\frac{4t}{1-t^2})^2 = 4$, и притом је кодомен сваке од функција $y = t - \frac{1}{t}$ $(t > 1)$, $y = t$ $(t > 0)$ и $y = \frac{4t}{1-t^2}$ $(0 < t < 1)$ цео скуп $\mathbb{R}^+$.

2. Крива је дата векторском функцијом $\vec{r}(t) = (at, b\cos t, b\sin t)$, где су a и b дате константе. Одредити елементе природног триедра, кривину и торзију криве у тачки $M(a\pi, -b, 0)$.

   Решење. Прво видимо да је $\dot{\vec{r}} = (a, -b\sin t, b\cos t)$, $\ddot{\vec{r}} = (0, -b\cos t, -b\sin t)$ и $\dddot{\vec{r}} = (0, b\sin t, -b\cos t)$.
   Пошто је $|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{a^2+b^2}$, следи $\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a, -b\sin t, b\cos t)$.
   Даље је $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (b^2, ab\sin t, -ab\cos t)$ и $|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = b\sqrt{a^2+b^2}$, па је $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b, a\sin t, -a\cos t)$.
   Најзад, $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = (0, -\cos t, -\sin t)$.
   У тачки M је $t = \pi$ и $\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a, 0, -b)$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b, 0, a)$, $\vec{n} = (0, 1, 0)$. Оскулаторна раван пролази кроз M и има нормалу $\vec{b}$, па је њена једначина $b(x - a\pi) + az = 0$, тј. $bx + az = ab\pi$. Слично, нормална раван пролази кроз M и има нормалу $\vec{\tau}$ и њена једначина је $ax - bz = a^2\pi$, а ректификациона раван пролази кроз M и има нормалу $\vec{n}$ и њена једначина је $y = -b$.

   Кривина је $K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{b}{a^2+b^2}$, а пошто је $[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}] = (\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \dddot{\vec{r}} = ab^2$, торзија је $T = \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$.
   И кривина и торзија су овде константне.

3. За који параметар a је крива задата векторском функцијом $\vec{r}(t) = (t, t^2, t + at^3)$ планарна, тј. лежи у равни? Која је то раван?

<u>*Решење.*</u> Крива је планарна ако је њена торзија свуда једнака нули. Дакле, потребно је да важи $[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}] = 0$ за свако t. Како је $\dot{\vec{r}} = (1, 2t, 1+3at^2)$, $\ddot{\vec{r}} = (0, 2, 6at)$ и $\dddot{\vec{r}} = (0, 0, 6a)$, налазимо $[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}] = 12a$, па мора бити $a = 0$. Тада цела крива лежи у оскулаторној равни. Тој равни припада тачка $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$. Бинормала $\vec{b}$ је колинеарна са $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = -2(1, 0, -1)$, па је оскулаторна раван $x - z = 0$.

4. Наћи тачку на кривој задатој векторском функцијом $\vec{r}(t) = (2\ln t, t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t})$ у којој је кривина максимална. У тој тачки наћи једначину оскулаторне равни.

<u>*Решење.*</u> Имамо $\dot{\vec{r}} = (-\frac{2}{t}, 1 - \frac{1}{t^2}, 1 + \frac{1}{t^2})$, $\ddot{\vec{r}} = (\frac{2}{t^2}, \frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3})$ и $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (-\frac{4}{t^3}, \frac{2t^2-2}{t^4}, \frac{-2t^2-2}{t^4})$. Сада је $|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{2} \cdot \frac{t^2+1}{t^2}$, $|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = 2\sqrt{2} \cdot \frac{t^2+1}{t^4}$ и $K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{t^2}{(t^2+1)^2}$.

Извод K по t је $K'(t) = \frac{2t(1-t^2)}{(t^2+1)^3}$, па је $K'(t) = 0$ само за $t = 1$ (параметри $t = 0$ и $t = -1$ су ван домена функције $\vec{r}$). Кривина је највећа за $t = 1$, тј. у тачки $\vec{r}(1) = (0, 2, 0)$, и тада је $K = \frac{1}{4}$. У тој тачки бинормала $\vec{b}$ је колинеарна са вектором $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = -4(1, 0, 1)$, па је оскулаторна раван $x + z = 0$.

5. Крива γ је дата векторском функцијом $\vec{r}(t) = (\sin t - \cos t)\vec{\imath} + (\sin t + \cos t)\vec{\jmath} + t \cdot \vec{k}$. Наћи елементе природног триедра у тачки $A(1, -1, \pi)$.

<u>*Решење.*</u> Имамо $\dot{\vec{r}} = (\cos t + \sin t, \cos t - \sin t, 1)$ и $\ddot{\vec{r}} = (\cos t - \sin t, -\cos t - \sin t, 0)$. Тачки A одговара $t = \pi$, па је у A $\dot{\vec{r}} = (-1, -1, 1)$, $\ddot{\vec{r}} = (-1, 1, 0)$ и $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (-1, -1, -2)$.

Налазимо тангенту $\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$, бинормалу $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$ и нормалу $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. Сада је нормална раван $(-x - y + z = \pi) \perp \vec{\tau}$, оскулаторна $(x + y + 2z = 2\pi) \perp \vec{b}$, а ректификациона $(x - y = 2) \perp \vec{n}$.

6. Дата је крива $\vec{r}(t) = (\cos t, 4\cos\frac{t}{2}, t + \sin t)$. Одредити елементе природног триедра, кривину и торзију у тачки $M(1, 4, 0)$. У којој тачки криве је кривина, односно торзија, највећа?

<u>*Решење.*</u> Прво налазимо $\dot{\vec{r}} = (-\sin t, -2\sin\frac{t}{2}, 1 + \cos t)$, $\ddot{\vec{r}} = (-\cos t, -\cos\frac{t}{2}, -\sin t)$, $\dddot{\vec{r}} = (\sin t, \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}, -\cos t)$. Још ће нам требати $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = ((3 - \cos t)\cos\frac{t}{2}, -2\cos^2\frac{t}{2}, 2\sin^3\frac{t}{2})$, а уз мало рачуна $|\dot{\vec{r}}| = 2$, $|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = \sqrt{6 + 2\cos t}$ и $[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}] = \frac{1}{2}(5 + \cos t)\sin\frac{t}{2}$.

У тачки M је $t = 0$ и тада је $\dot{\vec{r}} = (0, 0, 2)$, $\ddot{\vec{r}} = (-1, -1, 0)$ и $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (2, -2, 0)$, па добијамо $\vec{\tau} = (0, 0, 1)$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ и $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$. Једначине оскулаторне, нормалне и ректификационе равни су редом $x - y = -3$, $z = 0$ и $x + y = 5$. Кривина је $\frac{\sqrt{2}}{4}$, а торзија 0.

У општем случају је $K = \frac{\sqrt{6 + 2\cos t}}{8}$, што је максимално за $t = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, и тада је $K = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Такође, $T = \frac{(5 + \cos t)\sin\frac{t}{2}}{4(3 + \cos t)}$ је максимално за $t = (4k+1)\pi$ и тада је $T = \frac{1}{2}$ (пре него што посегнете за гломазним диференцијалним рачуном, приметите да је $\frac{5 + \cos t}{4(3 + \cos t)} \leqslant \frac{1}{2}$ и $\sin\frac{t}{2} \leqslant 1$).

7. Одредити векторе кривине и торзије криве дате векторском функцијом $\vec{r}(t) = (t^2, t^3, t^4)$ у тачки $A(1, 1, 1)$.

<u>*Решење.*</u> Пре свега, $\dot{\vec{r}} = (2t, 3t^2, 4t^3)$, $\ddot{\vec{r}} = (2, 6t, 12t^2)$ и $\dddot{\vec{r}} = (0, 6, 24t)$. У тачки A је $\dot{\vec{r}} = (2, 3, 4)$, $\ddot{\vec{r}} = 2(1, 3, 6)$, $\dddot{\vec{r}} = 6(0, 1, 4)$ и $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = 2(6, -8, 3)$, тангента је $\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2, 3, 4)$, а бинормала $\frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} = \frac{1}{\sqrt{109}}(6, -8, 3)$. Следи да је нормала $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{29 \cdot 109}}(-41, -18, 34)$.

Кривина је $K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{2\sqrt{29 \cdot 109}}{29^2}$, а торзија $T = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \cdot \dddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = \frac{12}{109}$, па тако добијамо $\vec{K} = K\vec{n} = \frac{2}{29^2}(-41, -18, 34)$ и $\vec{T} = -T\vec{n} = \frac{12}{109\sqrt{29 \cdot 109}}(-41, -18, 34)$.