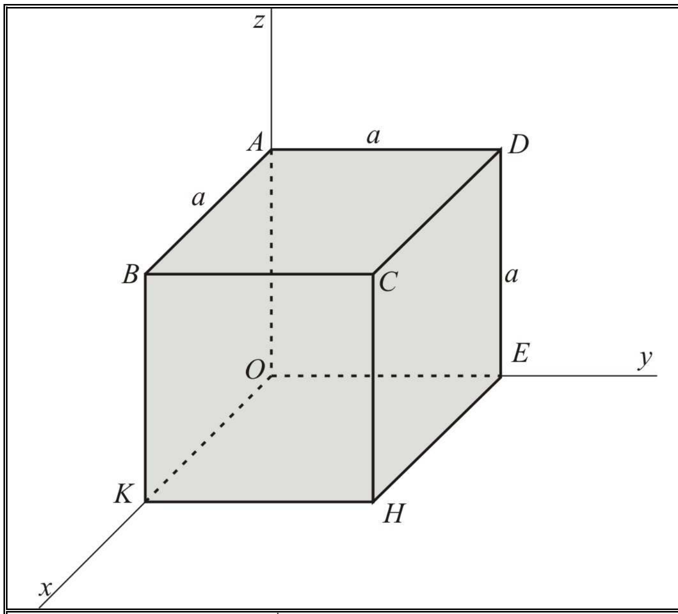
**<u>МЕХАНИКА М</u>**
**Наташа Тришовић**

# Сложено кретање крутог тела

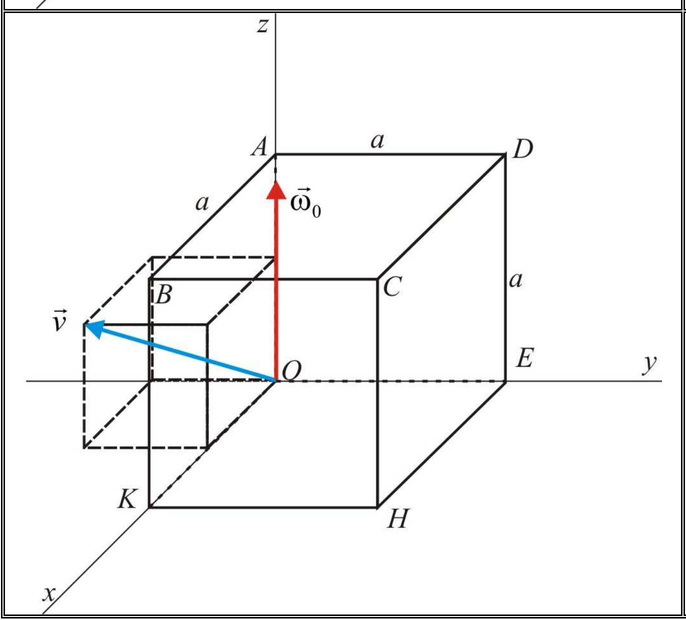
**задаци**

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>

**<u>Задатак 1.</u>** Коцка, ивице $a$, обрће се око осе $Oz$ у позитивном математичком смеру, угаоном брзином интензитета $\omega_0$, и истовремено креће се транслаторно брзином $\vec{v} = a\omega_0\vec{i} - a\omega_0\vec{j} + a\omega_0\vec{k}$.

Одредити резултујуће кретање коцке, као и брзине тачака $O$ и $C$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>

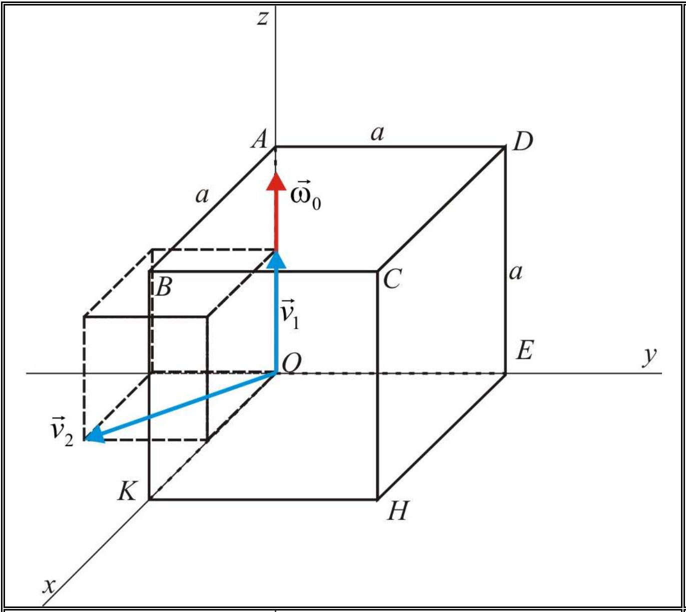
**Решење:**

1) Који је случај сложеног кретања тела?

**Брзина транслаторног кретања заклапа произвољни угао са вектором угаоне брзине**

(Никола Младеновић, Механика 2 – Кинематика, страна 118-119)

</td>
</tr>
</table>




2) Вектор брзине $\vec{v}$ разложити на две ортогоналне компоненте:

Компоненту $\vec{v}_1$, колинеарну оси $Oz$, и компоненту $\vec{v}_2$ у равни $xOy$ управну на осу $Oz$.

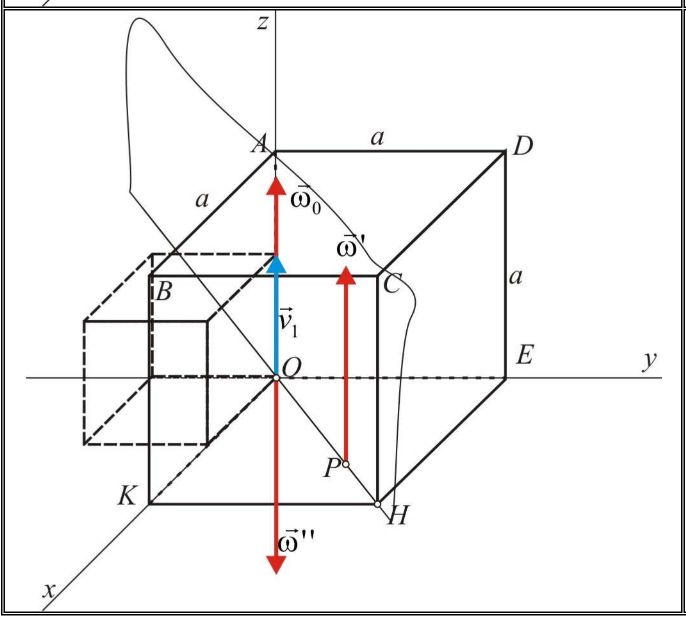
$$\vec{v} = \underbrace{a\omega_0\vec{i} - a\omega_0\vec{j}}_{\vec{v}_2} \underbrace{+a\omega_0\vec{k}}_{\vec{v}_1}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = a\omega_0\vec{k}$$

$$\vec{v}_2 = a\omega_0\vec{i} - a\omega_0\vec{j}$$

Дакле: $(\vec{v},\vec{\omega}_0) \sim (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{\omega}_0)$




3) Компоненту $\vec{v}_2$, заменити одговарајућим кинематичким спрегом $[\vec{\omega}';\vec{\omega}"]$, у равни управној на линију носача вектора $\vec{v}_2$.

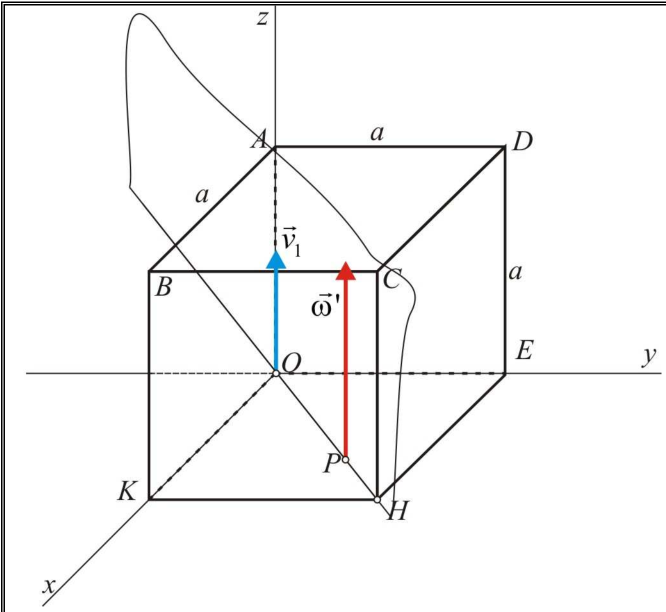
Вектори $\vec{\omega}', \vec{\omega}"$ се бирају тако да важи

$\vec{\omega}_0 = -\vec{\omega}", \quad \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}'$

($\vec{\omega}"$ се налази на оси $Oz$, и супротног је смера од вектора $\vec{\omega}_0$)

Сада је:

$$(\vec{v},\vec{\omega}_0) \sim (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{\omega}_0) \sim (\vec{v}_1,\vec{\omega}',\vec{\omega}",\vec{\omega}_0)$$




$$\left(\vec{v},\vec{\omega}_0\right)\sim\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{\omega}_0\right)\sim\left(\vec{v}_1,\vec{\omega}',\vec{\omega}'',\vec{\omega}_0\right)\sim\left(\vec{v}_1,\vec{\omega}'\right)$$

Јер је систем вектора $\left(\vec{\omega}'',\vec{\omega}_0\right)\sim 0$

4) Положај тачке $P$ на месту продора линије носача вектора $\vec{\omega}'$ кроз координатну раван $xOy$ одређује се сагласно једначини

$$\vec{v}_2=\vec{\omega}'\times\overrightarrow{PO}=\vec{\omega}'\times\left(-\overrightarrow{OP}\right)=\overrightarrow{OP}\times\vec{\omega}'$$

$$a\omega_0\vec{i}-a\omega_0\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_P & y_P & 0\\ 0 & 0 & \omega_0\end{vmatrix}$$

$$a\omega_0\vec{i}-a\omega_0\vec{j}=y_P\omega_0\vec{i}-x_P\omega_0\vec{j}$$

$$a\omega_0\vec{i}-a\omega_0\vec{j}=y_P\omega_0\vec{i}-x_P\omega_0\vec{j}$$

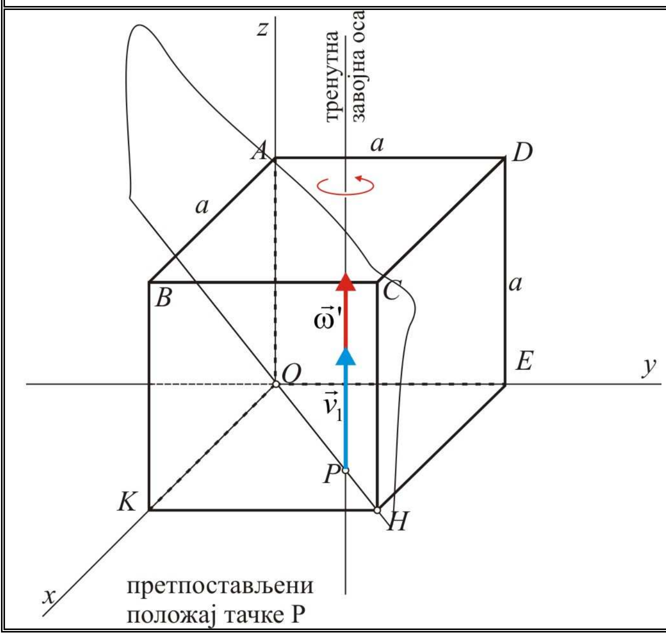
$$x_P=a,\quad y_P=a,\qquad P\left(a,a,0\right)$$

или (други начин)

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{\omega}'\times\vec{v}_2}{\omega'^2}$ (релација 4.38, стр 119)

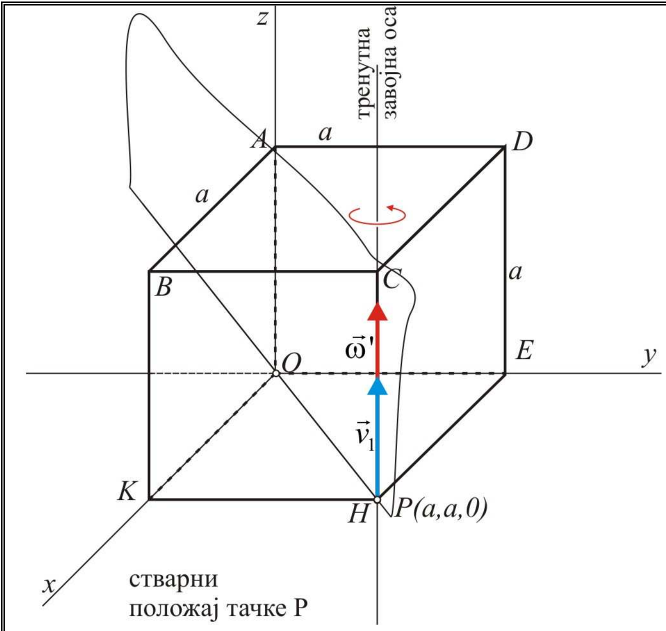
$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{\omega_0^2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega_0\\ a\omega_0 & -a\omega_0 & 0\end{vmatrix}=\frac{a\omega_0^2\vec{i}+a\omega_0^2\vec{j}}{\omega_0^2}$$

$$\overrightarrow{OP}=a\vec{i}+a\vec{j}+0\vec{k}$$




5) Вектор $\vec{v}_1$ је слободан вектор, па се може паралелно пренети у тачку $P$.

Тако се добија систем колинеарних вектора $\left(\vec{v}_1,\vec{\omega}'\right)$. На тај начин ово сложено кретање је сведено на **тренутно завојно кретање (кинематички завртањ).**




*6) Корак кинематичког завртња*:

$$h = v_1 T = v_1 \frac{2\pi}{\omega_0} = a\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$h = 2a\pi$$

*Параметар кинематичког завртња:*

$$p = \frac{v_1}{\omega'} = \frac{a\omega_0}{\omega_0} = a$$

или (други начин)

$$p = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\omega}_0}{\omega_0^2} = \frac{a\omega_0 \cdot 0 + \left(-a\omega_0\right) \cdot 0 + a\omega_0 \cdot \omega_0}{\omega_0^2} = a$$

(израз 4.49 стр 122 Младеновић)

*Једначина тренутне завојне осе:*

$$\frac{a\omega_0 - \omega_0 y}{0} = \frac{-a\omega_0 + \omega_0 x}{0} = \frac{a\omega_0}{\omega_0} = p = a$$

(релација 4.48, стр 122)

7) Брзине тачака $O$ и $C$:

$$\vec{v}_O = \underbrace{\vec{\omega}' \times \overrightarrow{PO}}_{\substack{usled\ rotacije\ tela \\ oko\ trenutne\ ose}} + \underbrace{\vec{v}_1}_{\substack{usled\ translacije \\ tela}} = \overrightarrow{OP} \times \vec{\omega}' + \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = -a\omega_0 \vec{i} + a\omega_0 \vec{j} + \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{v}$$

$\vec{v}_O = \vec{v} = a\omega_0 \vec{i} - a\omega_0 \vec{j} + a\omega_0 \vec{k}$ - што се могло закључити и из поставке задатка, јер се тачка $O$ налази на правој која садржи вектор $\vec{\omega}_0$.

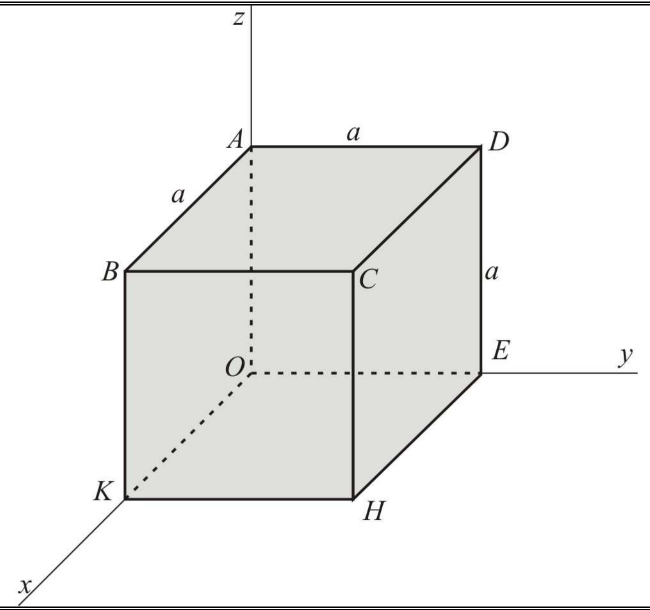
$$\vec{v}_C = \underbrace{\vec{\omega}' \times \overrightarrow{PC}}_{\substack{usled\ rotacije\ tela \\ oko\ trenutne\ ose}} + \underbrace{\vec{v}_1}_{\substack{usled\ translacije \\ tela}} = \overrightarrow{CP} \times \vec{\omega}' + \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ a-a & a-a & 0-a \end{vmatrix} = 0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_1$$

$\vec{v}_C = \vec{v}_1 = a\omega_0 \vec{k}$ - што се могло закључити и без рачуна јер се тачка $C$ налази на тренутној оси ротације и њена брзина се своди само на брзину услед транслације тела.

<table>
<tr><td>

**<u>Задатак 2.</u>** Коцка, ивице $a$, обрће се око $Oz$ осе у позитивном математичком смеру, угаоном брзином интензитета $\omega_0$, и истовремено обрће се око ивице $CH$ у истом смеру, угаоном брзином интензитета $3\omega_0$. Одредити резултујуће кретање коцке, као и брзине тачака $D$, $E$ и $O$.

</td><td>




</td></tr>
<tr><td>

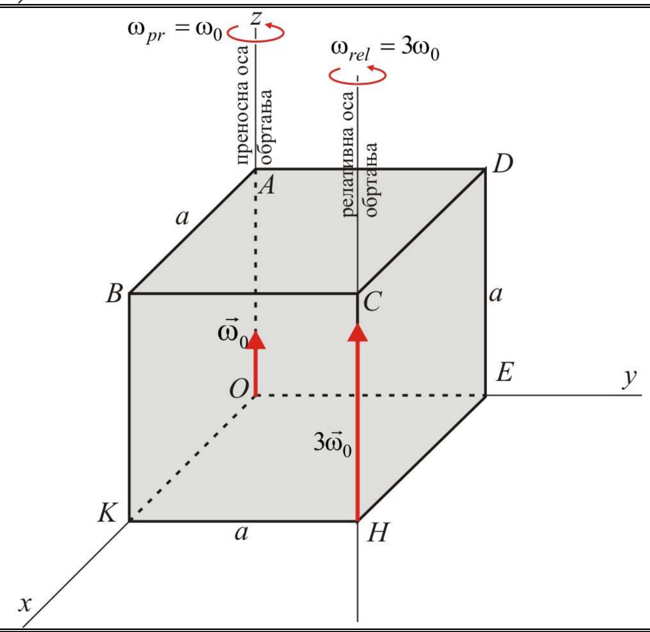
**Решење:**

1) Који је случај сложеног кретања тела?

**Слагање обртања крутог тела око паралелних оса угаоним брзинама истог смера**

(Никола Младеновић, Механика 2 – Кинематика, страна 112-114)

</td><td>




</td></tr>
</table>

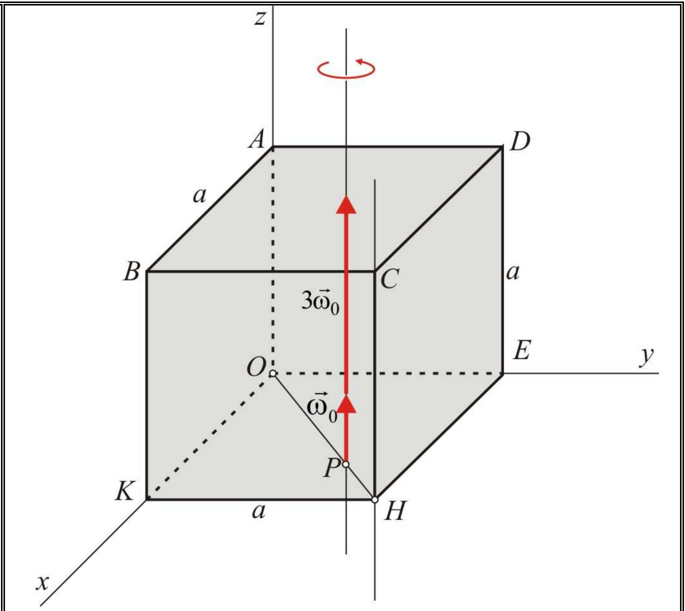
2) Вектор тренутне угаоне брзине једнак је збиру вектора преносне ($\vec{\omega}_0$) и релативне $(3\vec{\omega}_0)$ угаоне брзине:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + 3\vec{\omega}_0 = 4\vec{\omega}_0 = 4\omega_0\vec{k}$$

тј. $\left(\vec{\omega}_{pr}, \vec{\omega}_{rel}\right) \sim \vec{\omega}$

Тренутна оса ротације припада равни вектора преносне и релативне угаоне брзине и дели растојање између поменутих оса у односу, обрнуто пропорционалном односу интензитета угаоних брзина:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3\omega_0}{\overline{OP}} = \dfrac{\omega_0}{\overline{HP}} = \dfrac{4\omega_0}{\overline{HO}} \\ \overline{HO} = a\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \overline{OP} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4} \\ \overline{HP} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \end{array}$$




3) Координате тачке $P$: $P\left(\frac{3}{4}a, \frac{3}{4}a, 0\right)$

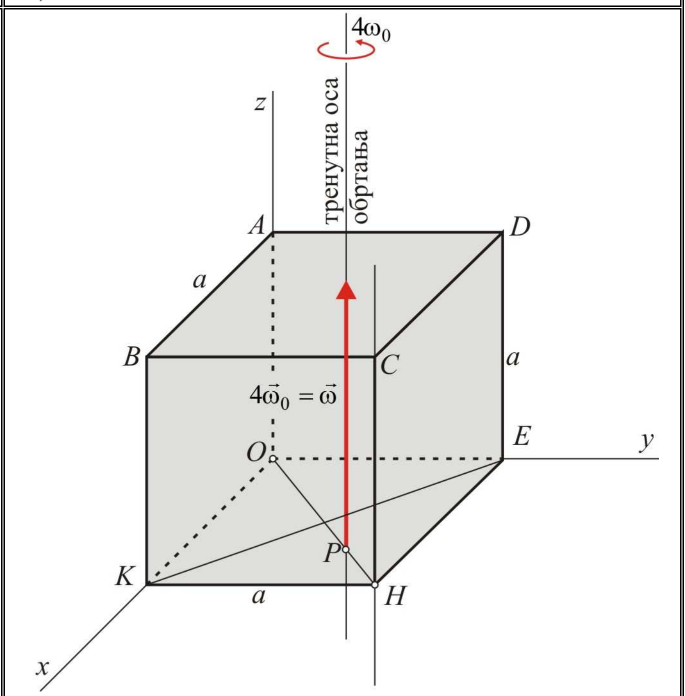
4) Брзине тачака $D$, $E$ и $O$ је могуће одредити користећи Ојлерову формулу (релација 2.27 страна 47, Младеновић). За то су потребне координате одговарајућих тачака:

$O(0,0,0)$, $E(0,a,0)$, $D(0,a,a)$

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OP} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{3a}{4} - 0 & \dfrac{3a}{4} - 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\omega_0 \end{vmatrix}$$

$\vec{v}_O = 3a\omega_0\vec{i} - 3a\omega_0\vec{j}$ - што је јасно из поставке задатка јер се тачка $O$ налази на преносној оси обртања, и има само релативну брзину:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_{Orel} + \vec{v}_{Opr} = \vec{v}_{Orel} + 0 = \underbrace{3\vec{\omega}_0}_{\vec{\omega}_{rel}} \times \overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH} \times 3\vec{\omega}_0$$




$$\vec{v}_E = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PE} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4\omega_0 \\ x_E - x_P & y_E - y_P & z_E - z_P \end{vmatrix}$$

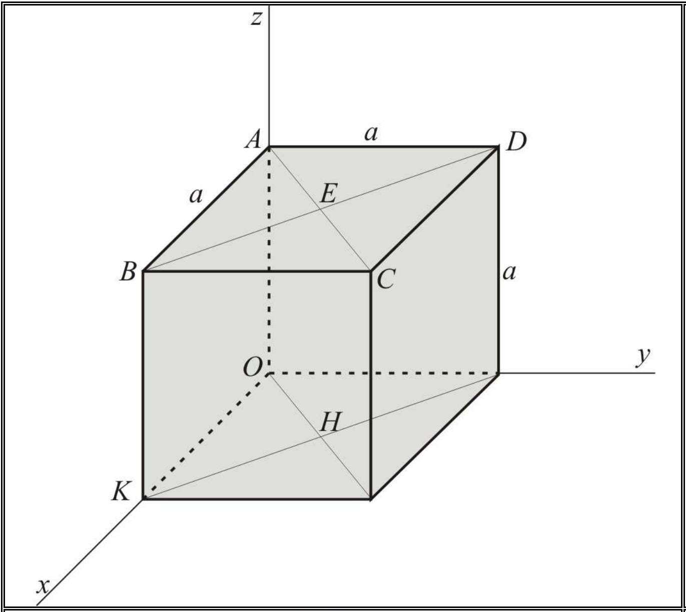
$$\vec{v}_E = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4\omega_0 \\ 0 - \dfrac{3}{4}a & a - \dfrac{3}{4}a & 0 \end{vmatrix} = -a\omega_0\vec{i} - 3a\omega_0\vec{j}$$

$$\vec{v}_D = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4\omega_0 \\ x_D - x_P & y_D - y_P & z_D - z_P \end{vmatrix}$$

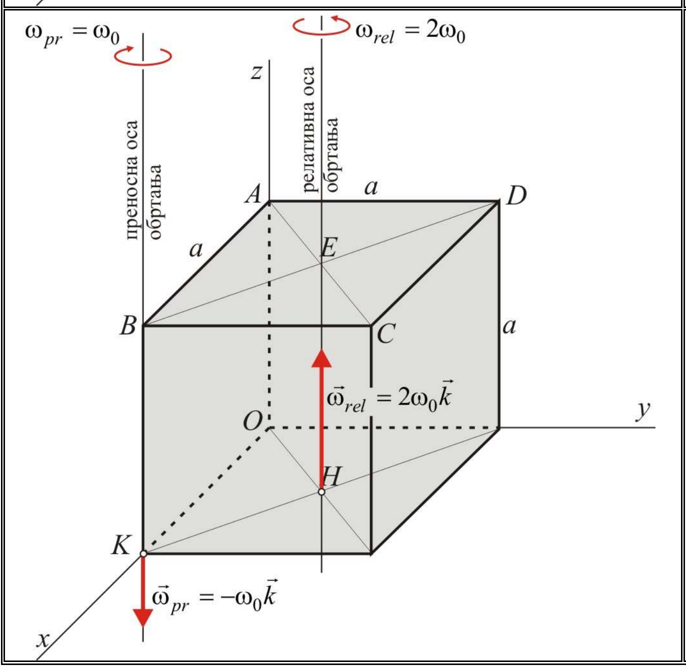
$$\vec{v}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4\omega_0 \\ 0 - \dfrac{3}{4}a & a - \dfrac{3}{4}a & a - 0 \end{vmatrix} = -a\omega_0\vec{i} - 3a\omega_0\vec{j}$$

$\vec{v}_D = \vec{v}_E$ што је очигледно јер је

$\overline{ED} \parallel$ *са тренутном осом обртања*




**Задатак 3.** Коцка, ивице $a$, обрће се око осе $EH$, угаоном брзином $\vec{\omega}_1 = 2\omega_0 \vec{k}$, и истовремено око ивице $BK$, угаоном брзином $\vec{\omega}_2 = -\omega_0 \vec{k}$. Одредити резултујуће кретање коцке, као и брзине тачака $B, C$ и $O$ ($\overline{EH} \parallel Oz$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$).

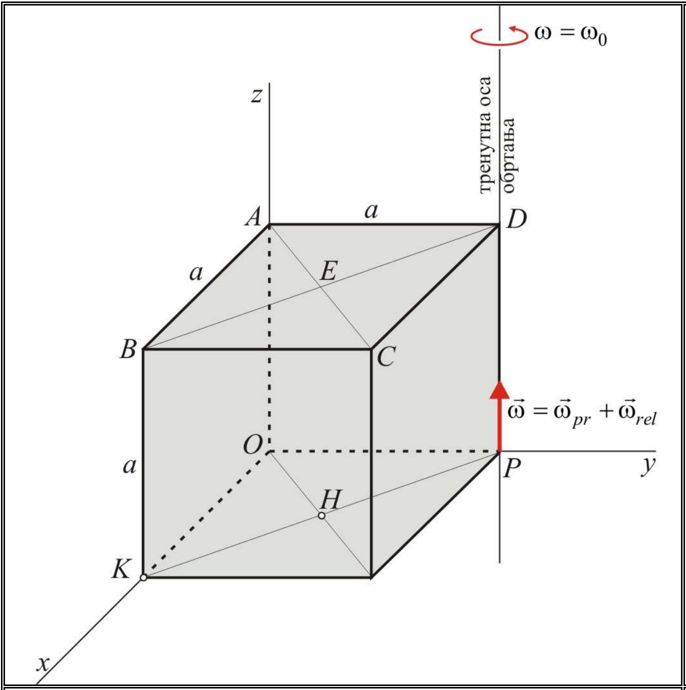



**Решење:**

1) Који је случај сложеног кретања тела?

**Слагање обртања крутог тела око паралелних оса угаоним брзинама супротног смера**

(Никола Младеновић, Механика 2 – Кинематика, страна 112-114)




2) Вектор тренутне угаоне брзине једнак је збиру вектора преносне ($\vec{\omega}_0$) и релативне $(3\vec{\omega}_0)$ угаоне брзине:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{pr} + \vec{\omega}_{rel} = -\omega_0 \vec{k} + 2\omega_0 \vec{k} = \omega_0 \vec{k}$$

тј. $\left(\vec{\omega}_{pr}, \vec{\omega}_{rel}\right) \sim \vec{\omega}$

Тренутна оса ротације припада равни вектора преносне и релативне угаоне брзине, а њен положај је одређен релацијом:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\omega_{pr}}{\overline{HP}} = \dfrac{\omega_{rel}}{\overline{KP}} = \dfrac{\omega}{\overline{HK}} \\ \overline{HK} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \dfrac{\omega_0}{\overline{HP}} = \dfrac{2\omega_0}{\overline{KP}} = \dfrac{\omega_0}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \\ \overline{HP} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \ \overline{KP} = a\sqrt{2} \end{array}$$

3) Координате тачке $P$: $P(0,a,0)$

4) Брзине тачака $B$, $C$ и $O$

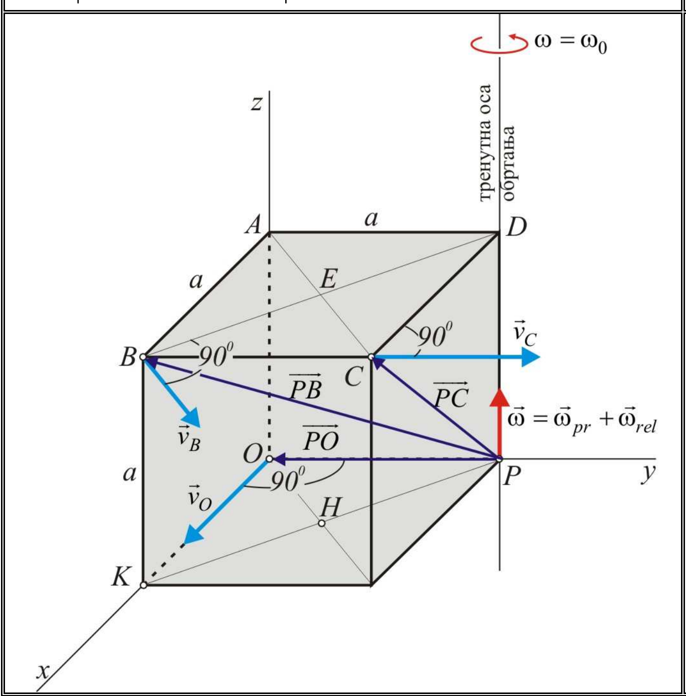
Координате тачака $B$, $C$ и $O$: $B(a,0,a)$, $C(a,a,a)$, $O(0,0,0)$

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ x_B - x_P & y_B - y_P & z_B - z_P \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ a-0 & 0-a & a-0 \end{vmatrix} = a\omega_0 \vec{i} + a\omega_0 \vec{j}$$

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ x_C - x_P & y_C - y_P & z_C - z_P \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ a-0 & a-a & a-0 \end{vmatrix} = a\omega_0 \vec{j}$$

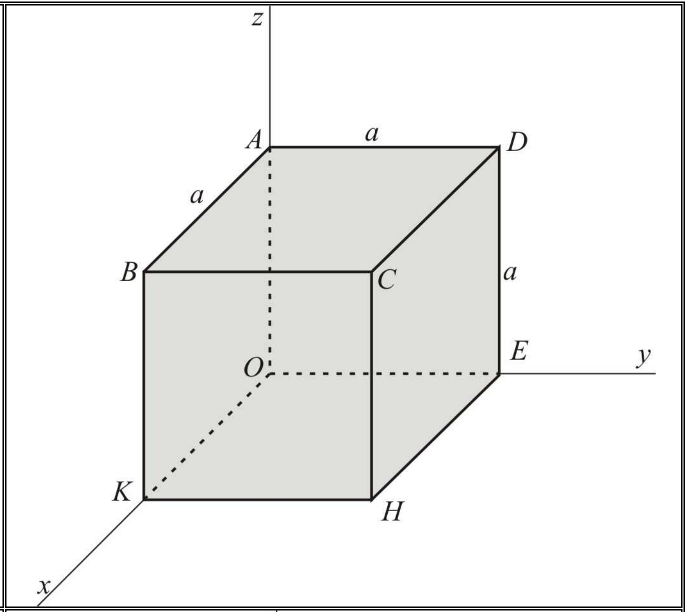



$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PO} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ x_O - x_P & y_O - y_P & z_O - z_P \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ 0-0 & 0-a & 0-0 \end{vmatrix} = a\omega_0 \vec{i}$$

Треба уочити да важи $\vec{v}_K = \vec{v}_B$, $\quad \vec{v}_A = \vec{v}_O$

**Задатак 4.** Коцка, ивице $a$, обрће се око $Oz$ осе у позитивном математичком смеру, једнолико са 120 обртаја у минути, и истовремено обрће се око $Ox$ осе у позитивном математичком смеру, такође једнолико са 90 обртаја у минути Одредити резултујуће кретање коцке, као и брзине тачака $D$, $E$ и $O$.




**Решење:**

1) Који је случај сложеног кретања тела?

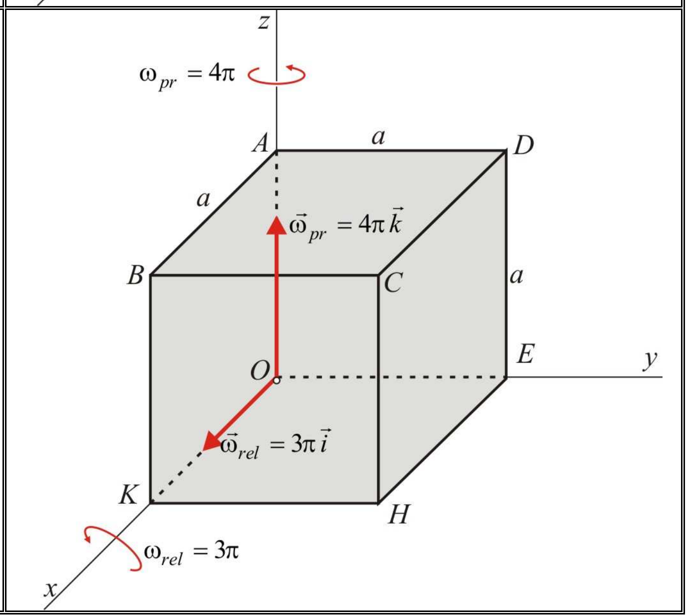
**Слагање обртања крутог тела око оса које се секу**

(Никола Младеновић, Механика 2 – Кинематика, страна 111-112)

Нека је обртање око осе $Oz$ преносно, а обртање око осе $Ox$ релативно.Следи:

$$\omega_{pr} = \frac{\pi n_{pr}}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi\, s^{-1}$$

$$\omega_{rel} = \frac{\pi n_{rel}}{30} = \frac{\pi \cdot 90}{30} = 3\pi\, s^{-1}$$



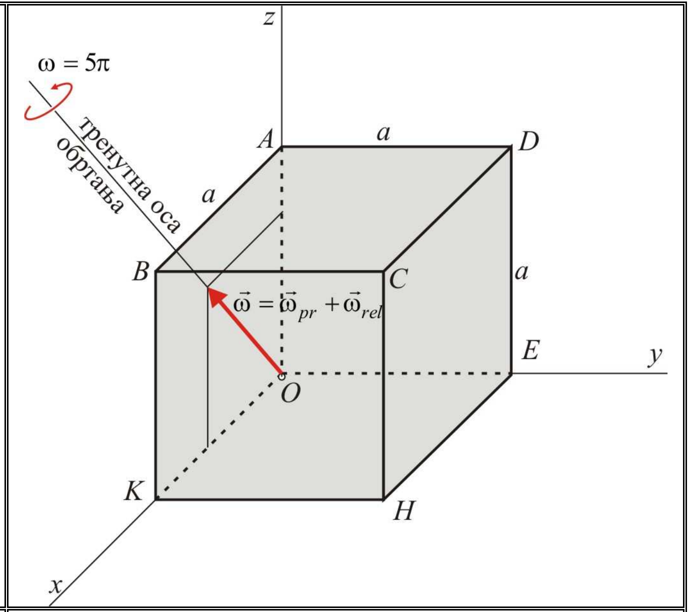
2) Резултат слагања два истовремена обртања крутог тела око оса које се секу је апсолутно кретање представљено обртањем око тренутне осе ротације која пролази кроз пресечну тачку оса преносног и релативног кретања. Вектор тренутне (апсолутне) угаоне брзине тела једнак је векторском збиру преносне и угаоне брзине:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{pr} = 3\pi\vec{i} + 4\pi\vec{k},\ \ \omega = \sqrt{(3\pi)^2 + (4\pi)^2}$$

$$\omega = 5\pi\ s^{-1},\quad \left(\vec{\omega}_{pr}, \vec{\omega}_{rel}\right) \sim \vec{\omega}$$

Једначина осе резултујућег обртања је:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z}{4}$$




3) Брзине тачака $D$, $E$ и $O$.
Њихове координате:
$O(0,0,0)$, $E(0,a,0)$, $D(0,a,a)$

Тачка $O$ се налази на тренутној оси обртања и следи $\vec{v}_O = 0$

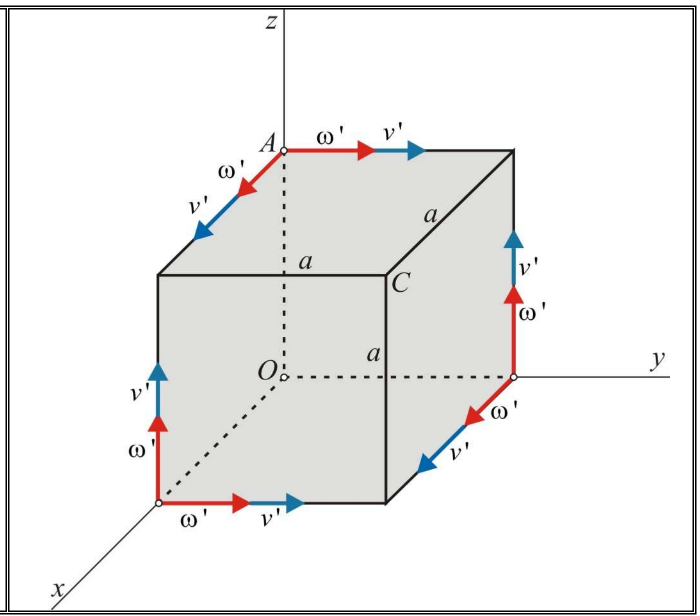
$$\vec{v}_E = \vec{\omega} \times \overline{OE} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3\pi & 0 & 4\pi \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = -4a\pi\vec{i} + 3a\pi\vec{k}$$

$$\vec{v}_D = \vec{\omega} \times \overline{OD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3\pi & 0 & 4\pi \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = -4a\pi\vec{i} + 3a\pi\vec{k}$$

**Напомена:**
**Уместо тачке О могуће је у Ојлеровој формули узети било коју тачку на тренутној оси ротације. Резултат ће бити исти. Проверити и размислити зашто!!**

**<u>Задатак 5.</u>** Коцка, ивице $a$, изводи истовремено шест завојних кретања као на слици. Одредити резултујуће кретање, ако је обртање једнолико са 60 обртаја у минути, а интензитет једне од брзина транслације је $v' = 5\frac{cm}{s}$.

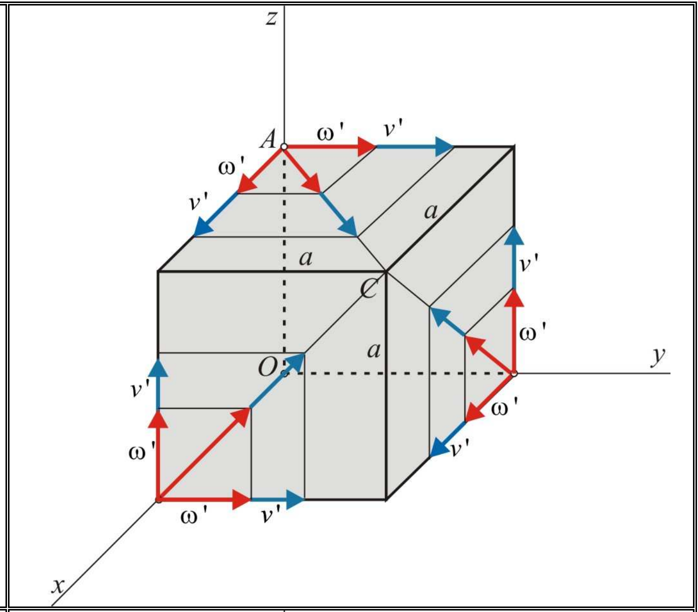
*Напомена.* Изгледа 'страшно', али није тешко ☺



**Решење:**

Интензитет угаоне брзине једног обртања је: $\omega' = \frac{\pi n}{30} = 2\pi \;\; s^{-1}$

Могуће је сложити одговарајуће сучељне парове угаоних брзина и брзина као на слици.




$\vec{v} = 2v'\vec{i} + 2v'\vec{j} + 2v'\vec{k}$

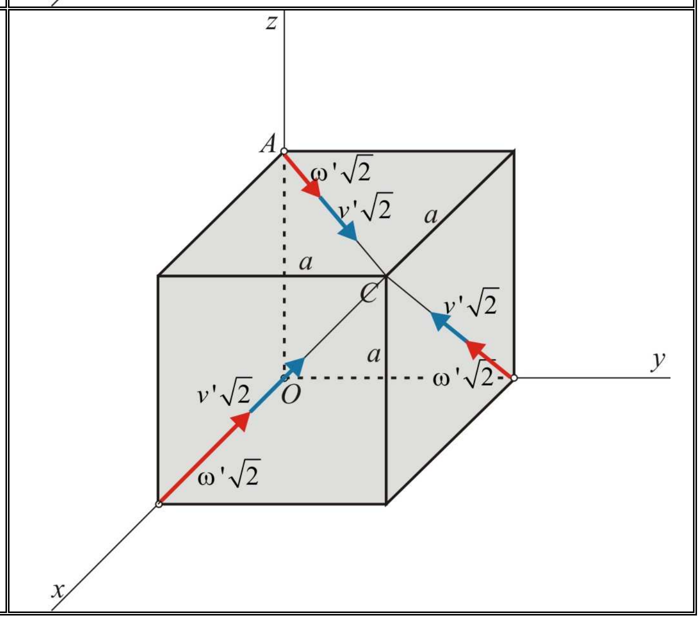
$\vec{v} = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$

$v = \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} = 10\sqrt{3}\,\frac{cm}{s}$

$\vec{\omega} = 2\omega'\vec{i} + 2\omega'\vec{j} + 2\omega'\vec{k}$

$\vec{\omega} = 4\pi\vec{i} + 4\pi\vec{j} + 4\pi\vec{k}$

$\omega = \sqrt{16\pi^2 + 16\pi^2 + 16\pi^2} = 4\pi\sqrt{3} \;\; \frac{1}{s}$



Резултујуће кретање је тренутно завојно кретање крутог тела, угаоном брзином $\vec{\omega} = 4\pi\vec{i} + 4\pi\vec{j} + 4\pi\vec{k}$ интензитета $\omega = 4\pi\sqrt{3}\ s^{-1}$, око тренутне завојне осе која пролази кроз тачке $O$ и $C$.

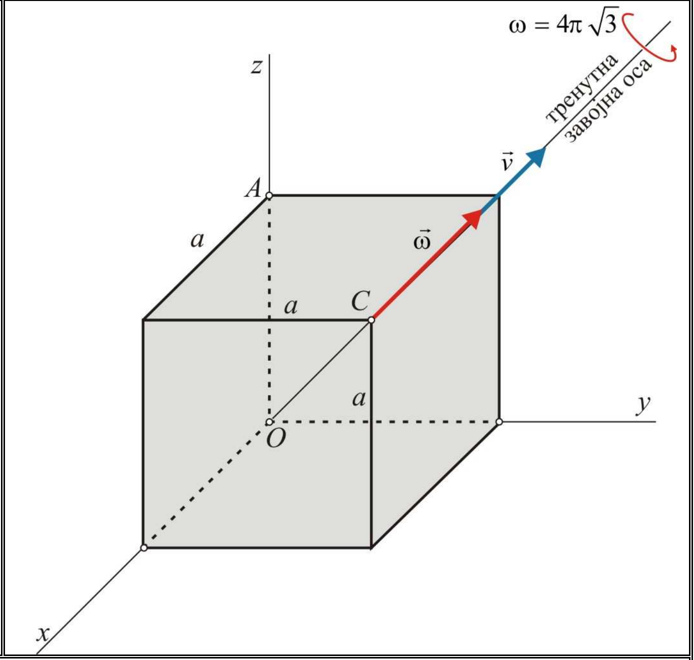
Параметар завртња

$$p = \frac{v}{\omega} = \frac{10\sqrt{3}}{4\pi\sqrt{3}} = \frac{5}{2\pi} cm$$

Једначина тренутне завојне осе:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

Завојно кретање се не може даље упростити.

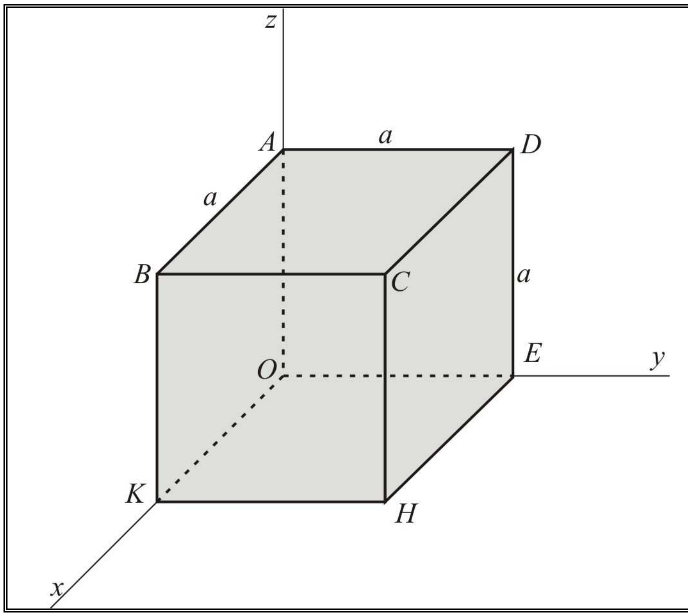



Сада је могуће израчунати брзину било које тачке на коцки.
Пример тачке А:

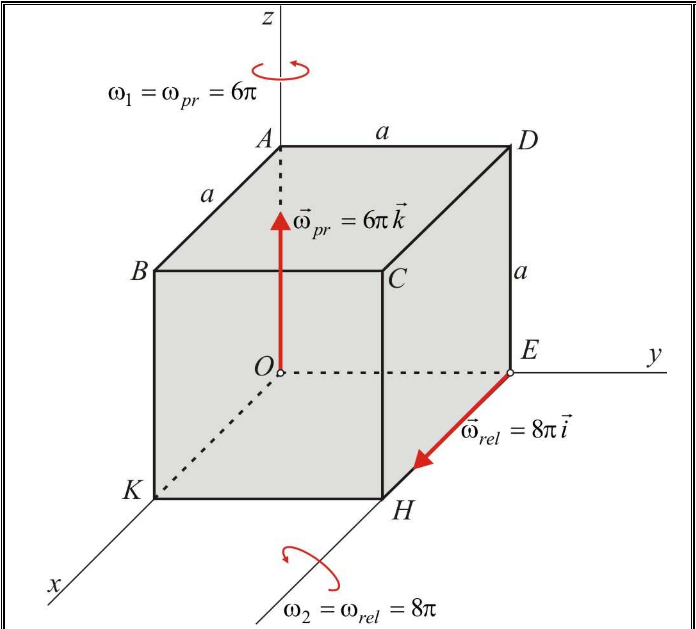
$$\vec{v}_A = \vec{v} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{v}_A = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4\pi & 4\pi & 4\pi \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k} + 4\pi a\vec{i} - 4\pi a\vec{j}$$

$$\vec{v}_A = (10 + 4\pi a)\vec{i} + (10 - 4\pi a)\vec{j} + 10\vec{k}$$




**<u>Задатак 6.</u>** Коцка, ивице $a = 10cm$, обрће се око $Oz$ осе у позитивном математичком смеру, једнолико са 180 обртаја у минути, и истовремено обрће се око ивице $EH$ осе у позитивном математичком смеру, такође једнолико са 240 обртаја у минути Одредити резултујуће кретање коцке.




**Решење:**

1) Који је случај сложеног кретања тела?

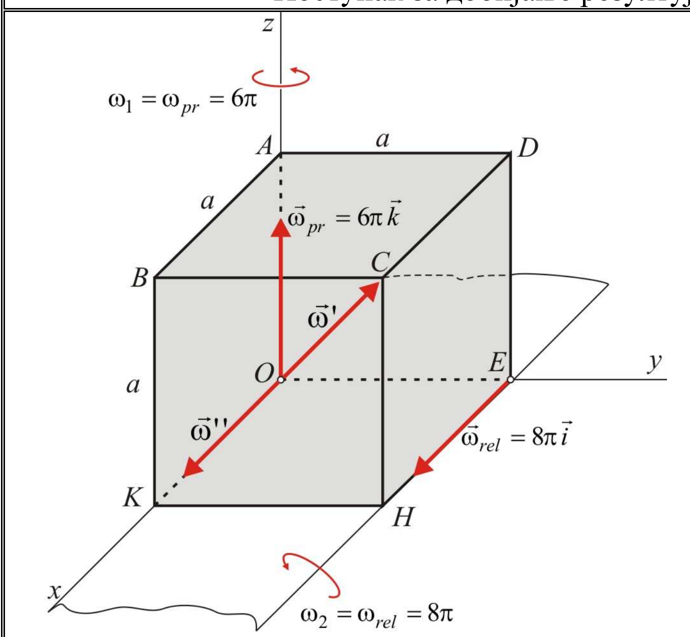
**Слагање обртања крутог тела око оса које се мимоилазе**

Нека је обртање око осе $Oz$ преносно, а обртање око ивице $EH$ релативно.Следи:

$$\omega_{pr} = \frac{\pi n_{pr}}{30} = \frac{\pi \cdot 180}{30} = 6\pi\, s^{-1}$$

$$\omega_{rel} = \frac{\pi n_{rel}}{30} = \frac{\pi \cdot 240}{30} = 8\pi\, s^{-1}$$

Поступак за добијање резултујућег кретања у овом случају:



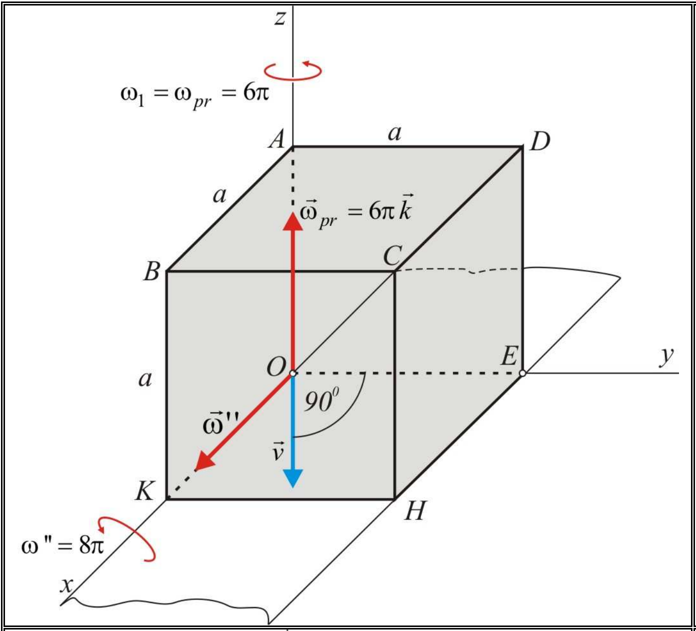

2) У тачки $O$ додаје се систем вектора $(\vec{\omega}'', \vec{\omega}') \sim 0$

Вектори $\vec{\omega}', \vec{\omega}''$ се бирају тако да важи

$$\vec{\omega}_{rel} = \vec{\omega}'', \quad \vec{\omega}_{rel} = -\vec{\omega}'$$

Сада је:

$$\left(\vec{\omega}_{pr}, \vec{\omega}_{rel}\right) \sim \left(\vec{\omega}_{pr}, \vec{\omega}_{rel}, \vec{\omega}', \vec{\omega}''\right)$$



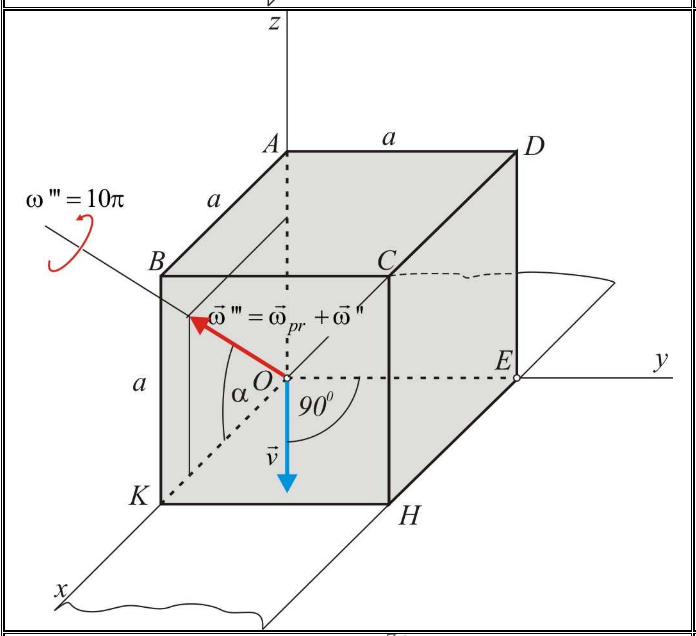

3) Кинематички спрег $\left[\vec{\omega}';\vec{\omega}_{rel}\right]$ се може заменити вектором брзине $\vec{v}$ (као на слици), тако да се почетни систем мимоилазних вектора $\vec{\omega}_{rel}$ и $\vec{\omega}_{pr}$ може трансформисати на следећи начин:

$$\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{\omega}_{rel}\right)\sim\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{\omega}_{rel},\vec{\omega}',\vec{\omega}''\right)\sim\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{v},\vec{\omega}''\right)$$

Брзина транслације $\vec{v}$ може се одредити применом релације:

$$\vec{v}=\vec{\omega}_{rel}\times\overrightarrow{EO}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8\pi & 0 & 0\\ 0 & -a & 0\end{vmatrix}=-8a\pi\vec{k}$$

(прочитати о кинамитичком спрегу – књига Младеновић, страна 115 и 116).




4) Сучељни вектори $\vec{\omega}''$ и $\vec{\omega}_{pr}$ могу се векторски сабрати:

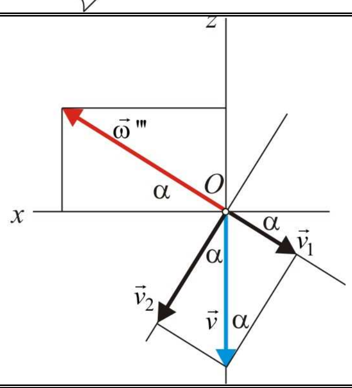
$$\vec{\omega}'''=\vec{\omega}''+\vec{\omega}_{pr}=8\pi\vec{i}+6\pi\vec{k},\qquad \omega'''=10\pi$$

$$\cos\alpha=\frac{\omega''}{\omega'''}=\frac{8\pi}{10\pi}=\frac{4}{5},\qquad \sin\alpha=\frac{\omega_{pr}}{\omega'''}=\frac{6\pi}{10\pi}=\frac{3}{5}$$

Почетни систем мимоилазних вектора $\vec{\omega}_{rel}$ и $\vec{\omega}_{pr}$ сада добија препознатљив облик:

$$\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{\omega}_{rel}\right)\sim\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{\omega}_{rel},\vec{\omega}',\vec{\omega}''\right)\sim\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{v},\vec{\omega}''\right)\sim\left(v,\vec{\omega}'''\right)$$

Овај случај сложеног кретања је урађен у задатку број 1 – то је случај када <u>брзина транслаторног кретања гради произвољан угао са осом обртања</u>. Наставак решавања задатка је аналоган са поступком у задатку 1.

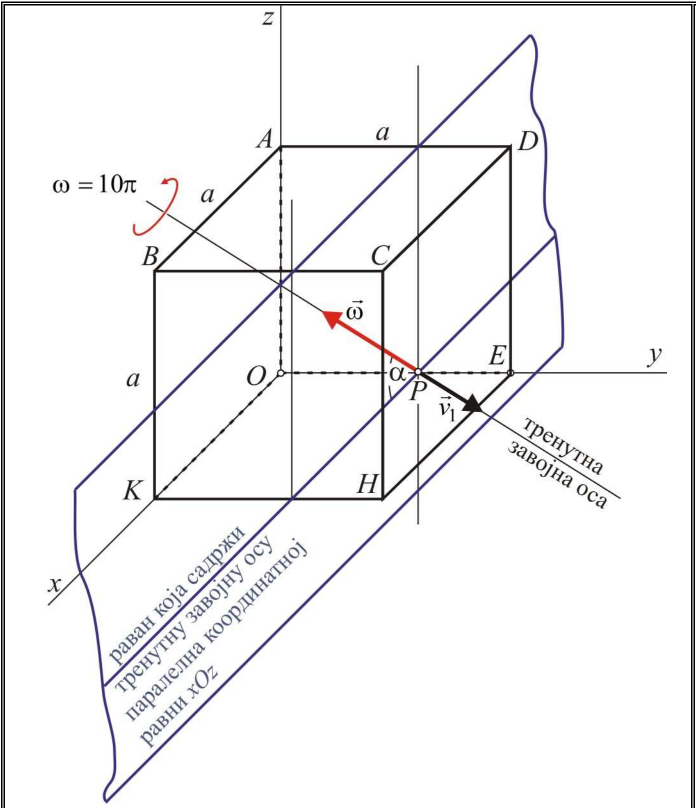



5) Дакле, у том поступку следи разлагање вектора брзине $\vec{v}$ на две компоненте (једна у правцу осе ротације, а друга управна на тај правац)

Интензитети тих компоненти су:

$$v_1=v\sin\alpha=8\pi a\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{5}\pi a$$

$$v_2=v\cos\alpha=8\pi a\cdot\frac{4}{5}=\frac{32}{5}\pi a$$




6) Компоненту $\vec{v}_2$ могуће је заменити кинематичким спрегом $\vec{v}_2 \sim [\vec{\omega}'''';\vec{\omega}]$ са особином: $\vec{\omega}=\vec{\omega}'''$, $\vec{\omega}''''=-\vec{\omega}'''$ (то није нацртано на слици, то је задатак за читаоце).

Положај тачке $P$ (видети задатак 1):

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{\omega}'''\times\vec{v}_2}{\omega'''^2}=\frac{1}{(10\pi)^2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8\pi & 0 & 6\pi\\ v_2\sin\alpha & 0 & -v_2\cos\alpha\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{(10\pi)^2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8\pi & 0 & 6\pi\\ \frac{32}{5}\pi a\frac{3}{5} & 0 & -\frac{32}{5}\pi a\frac{4}{5}\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{64\pi^2 a}{(10\pi)^2}\vec{j}=\frac{16}{25}a\vec{j}$$

Значи, резултујуће кретање коцке је завојно кретање.

Параметар кинематичког завртња: $p=\frac{v_1}{\omega}=\frac{\frac{24}{5}\pi a}{10\pi}=\frac{24}{50}a=4.8cm$

Једначина тренутне завојне осе (оса кинематичког завртња):

$\frac{x}{8}=\frac{y-\frac{16}{25}a}{0}=\frac{z}{6}$ или ако је разумљивије: $y=\frac{16}{25}a,\quad z=\frac{6}{8}x$

**<u>Задатак 7.</u>** Тело изводи истовремено два обртања у позитивном математичком смеру око оса $Oy$ и $Oz$ са 60 об/мин и 80 об/мин респективно, и транслаторно кретање у смеру $Oy$ осе брзином 5 м/с. Одредити резултујуће кретање крутог тела.

**<u>Решење.</u>**

Тренутно завојно кретање.

Интензитет брзине завртња: 3 м/с

Тренутна угаона брзина: $\omega=\frac{10\pi}{3}$, $\qquad \vec{\omega}=2\pi\vec{j}+\frac{8\pi}{3}\vec{k}$

Параметар завртња: $p=\frac{9}{10\pi}$

Положај тачке $P$: $\overrightarrow{OP}=-\frac{6}{5\pi}\vec{i}$

Једначина тренутне завојне осе: $\frac{x+\frac{6}{5\pi}}{0}=\frac{y}{2\pi}=\frac{3z}{8\pi}$

**Задатак 8.** (факултативно) Период обртања Сунчевих пега, посматрано са Земље, једнак је 29,6 дана. Одредити стварни период обртања ових пега, ако је познато да се Сунце обрће у истом смеру у коме се око њега креће Земља. Годину узети једнаку 365 дана. Нагиб Земљине осе према равни еклиптике не узимати у обзир.

**Решење:** $T_s = 27.38$ дана

**Задатак 9.** (факултативно) Тело, обрћући се око Земље по кружној орбити, налази се у неком тренутку на правој која спаја центре Земље и Месеца, и има период обртања око Земље, једнак $T_1$. Ако је познато да је период обртања Месеца око Земље једнак $T_2$, одредити кроз колико времена $T$ ће тело опет бити на правој Земља – Месец, ако се раван његове орбите поклапа са равни Месечеве орбите. Периоди $T_1$ и $T_2$ су израчунати у односу на систем који се креће заједно са центром Земље праволинијски у односу на звезде.

**Решење:** $T = \dfrac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ - при супротним смеровима обртања тела и Месеца у односу на Земљу.

$T = \dfrac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$ - при једнаким смеровима њиховог кретања.

**Designed by NT, Dec.2009**