# Маклоренов и Тејлоров полином

Математика 1 - лекција 8

*Душан Ђукић*

---

Општи облик:

- Маклоренов полином функције $f(x)$ степена $n$:
  $P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.
- $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, где је грешка у апроксимацији $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}$ за неко (непознато) $t$ између 0 и $x$, под претпоставком да $(n+1)$-ви извод постоји.

  Тада често пишемо $f(x) = P_n(x) + O(x^{n+1})$, тј. $R_n(x) = O(x^{n+1})$, што значи да је остатак $R_n(x)$ реда $x^{n+1}$ и занемарљиво је мали у односу на $x^n$ када $x \to 0$ - тј. $\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} < \infty$ и $\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$.

  Ово $O(\cdot)$ је тзв. Ландауов О-симбол. Ако је $f(x) = O(x^n)$ и $g(x) = O(x^m)$ $(m \geqslant n)$ када $x \to 0$, онда је $f(x) + g(x) = O(x^n)$, $x^k f(x) = O(x^{n+k})$ и $f(x)g(x) = O(x^{m+n})$.
- Тејлоров полином функције $f(x)$ степена $n$ у тачки $x = a$:
  $P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Неки "таблични" Маклоренови развоји:

- $(1+x)^a = 1 + ax + \dfrac{a(a-1)}{2}x^2 + \dfrac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 + \cdots = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$,
  где је $\dbinom{a}{k} = \dfrac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!}$ за $k = 1, 2, \dots$;
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \cdots = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$;
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$,
  $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$;
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$.

---

1. Наћи Маклоренов ред степена 3 функције $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

   *Решење.* Диференцирамо трипут: $f(x) = \cos^{\frac12} x$, $f'(x) = -\frac12 \cos^{-\frac12} x \sin x$, $f''(x) = -\frac14 \cos^{\frac12} x - \frac14 \cos^{-\frac32} x$, $f'''(x) = \frac18 \cos^{-\frac12} x \sin x - \frac38 \cos^{-\frac52} x \sin x$.

   У тачки $x = 0$ је $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -\frac12$ и $f'''(0) = 0$. Маклоренов полином степена 3 је $P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - \frac14 x^2$.

2. Може ли се функција $f(x) = x^{\frac32}$ развити у Маклоренов ред?

   *Решење.* Како је $f'(x) = \frac32 x^{\frac12}$ и $f''(x) = \frac34 x^{-\frac12} \to \infty$ када $x \to 0$, функција $f$ нема други извод у $x = 0$, па нема ни Маклореновог полинома степена већег од 1.

3. Развити функцију $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ у Маклоренов ред степена 4.

   *Решење.* Имамо $f'(x) = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Даље је $f''(x) = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = (2x^2-1)(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$ и $f^{(4)}(x) = (9x-6x^3)(1+x^2)^{-\frac{7}{2}}$.

   У тачки $x = 0$ је $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$ и $f^{(4)}(0) = 0$. Маклоренов полином степена 4 је $P_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = x - \frac{1}{6}x^3$.

4. Одредити Тејлоров полином реда 3 функције $f(x) = x^2 \sin x$ у околини тачке $a = \pi$.

   *Решење.* Прва три извода су $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$, $f''(x) = (2-x^2)\sin x + 4x\cos x$ и $f'''(x) = -6x\sin x + (6-x^2)\cos x$. Пошто је $\sin\pi = 0$ и $\cos\pi = -1$, у тачки $a = \pi$ је $f'(\pi) = -\pi^2$, $f''(\pi) = -4\pi$ и $f'''(\pi) = \pi^2 - 6$. Тражени Тејлоров полином је $P_3(x) = -\pi^2(x-\pi) - 2\pi(x-\pi)^2 + (\frac{\pi^2}{6} - 1)(x-\pi)^3$.

5. Апроксимирати функцију $f(x) = \ln(x + e^x)$ Маклореновим полиномом степена 3 и помоћу ње приближно израчунати $f(0,1)$.

   *Решење.* Знамо да је $x + e^x = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$ и $\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \cdots$, па стављањем $y = x + e^x - 1 = 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$ добијамо $\ln(x+e^x) = (2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3) - \frac{1}{2}(2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)^2 + \frac{1}{3}(2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)^3 + \cdots = (2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3) - \frac{1}{2}(4x^2 + 2x^3 + \cdots) + \frac{1}{3}(8x^3 + \cdots) = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \cdots$; Маклоренов полином је $P_3(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3$.

   За $x = 0.1$ је $f(x) \approx P_3(0.1) = 0,187$. (Тачна вредност $f(0,1)$ је $0,18662\ldots$.)

6. Апроксимирати функцију $f(x) = \sqrt[3]{1+6x}$ Маклореновим полиномом степена 3. Приближно израчунати $f(0,1) = \sqrt[3]{1,6}$ и проценити грешку.

   *Решење.* Диференцирамо три пута за Маклоренов полином, а четврти пут за грешку: $f(x) = (1+6x)^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = 2(1+6x)^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -8(1+6x)^{-\frac{5}{3}}$, $f'''(x) = 80(1+6x)^{-\frac{8}{3}}$, $f^{(4)}(x) = -1280(1+6x)^{-\frac{11}{3}}$. Одатле је $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = -8$, $f'''(0) = 80$ и $f^{(4)}(0) = -1280$, тако да је $f(x) = 1 + 2x - 4x^2 + \frac{40}{3}x^3 + R_3(x)$, при чему је $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(t)}{4!}x^4 = -\frac{160}{3}(1+6t)^{-\frac{11}{3}}x^4$ за неко $t \in [0,x]$.

   За $x = 0,1$ добијамо $f(0,1) \approx 1,173$, уз грешку $|R_3(x)| = |-\frac{160}{3}(1+6t)^{-\frac{11}{3}}10^{-4}| < \frac{160}{3}\cdot 10^{-4} < 0,006$. Дакле, $f(0,1) = \sqrt[3]{1,6} = 1,173 \pm 0,006$. (Заиста, $\sqrt[3]{1,6} = 1,1696\ldots$)

7. Апроксимирати функцију $f(x) = \ln(1 - 3x + 2x^2)$ Маклореновим полиномом степена 3 и помоћу њега приближно израчунати $\ln 0,72$.

   *Решење.* Пошто је $f(x) = \ln((1-x)(1-2x)) = \ln(1-x) + \ln(1-2x)$, можемо да користимо таблични развој за $\ln(1+x)$: имамо
   $\ln(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \cdots = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ и
   $\ln(1-2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \cdots = -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 - \cdots$.
   Сабирањем добијамо $P_3(x) = -3x - \frac{5}{2}x^2 - 3x^3$, па је $f(0,1) = \ln(0,72) \approx P_3(0,1) = -0,328$ (у ствари, $f(0,1) = -0,328504\ldots$).

8. Развити функцију $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ у Тејлоров ред степена 4 у околини тачке $a = -1$.

   *Решење.* Довољно је развити функцију $f(x-1) = \ln(x^2+1)$ у Маклоренов ред степена 4. Знајући да је $\ln(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)$, имамо $f(x-1) = \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + O(x^6)$. Следи да је $f(x) = (x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1)^4 + R_5$.

9. Развити функцију $f(x) = x^3\cos x^4$ у Маклоренов полином степена 25.

   *Решење.* Коришћењем табличног развоја за $\cos x$ добијамо $\cos x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^8 + \frac{1}{4!}x^{16} - \frac{1}{6!}x^{24} + \cdots$. Множење са $x^3$ даје $x^3\cos x^4 = x^3 - \frac{1}{2}x^{11} + \frac{1}{24}x^{19} - \frac{1}{720}x^{27} + \cdots$. Сабирци степена већег од 25 отпадају. Остаје $P_{25}(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^{11} + \frac{1}{24}x^{19}$.

10. Израчунати лимес $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1-x)}+\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

*Решење.* Записимо лимес као $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{\ln(1-x)\ln(1+x)}$. И бројилац и именилац се могу развити у Маклоренов ред: пошто је $\ln(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)$ и $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)$, следи $\ln(1-x)+\ln(1+x)=-x^2+O(x^3)$ и $\ln(1-x)\ln(1+x)=(-x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3))(x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3))=-x^2+O(x^3)$. Дакле, $\frac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{\ln(1-x)\ln(1+x)}=\frac{-x^2+O(x^3)}{-x^2+O(x^3)}$ - што није "једнако" 1, али тежи 1 када $x\to 0$.

11. Израчунати лимес $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x\sin x\ln(1-2x)}{x^4}+\dfrac{2}{(x-x^2)^2}\right)$.

*Решење.* Тражени лимес је $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}$, где је $f(x)=e^x\sin x\ln(1-2x)+\frac{2x^2}{(1-x)^2}$. Ово је напорно за рад простим Лопиталовим правилом. Уместо тога, развићемо функцију $f$ у Маклоренов ред. Испоставља се да је довољно развити је до 4. степена. Тада је $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)$, $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+O(x^4)$ и $\ln(1-2x)=-2x-2x^2-\frac{8}{2}x^3+O(x^4)$, па је $e^x\sin x\ln(1-2x)=-2x^2-4x^3-\frac{16}{3}x^4+O(x^5)$. С друге стране, $\frac{2x^2}{(1-x)^2}=2x^2(1+2x+3x^2+O(x^3))=2x^2+4x^3+6x^4+O(x^5)$, тако да је $f(x)=\frac{2}{3}x^4+O(x^5)$. Следи да је $\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{3}+O(x)\to\frac{2}{3}$ када $x\to 0$, па је одговор $\frac{2}{3}$.

12. Наћи косе или хоризонталне асимптоте функције $f(x)=\sqrt[5]{x^2(x+1)^3}$.

*Решење.* Имамо $\frac{f(x)}{x}=\sqrt[5]{x^{-3}(x+1)^3}=(1+\frac{1}{x})^{\frac{3}{5}}$. Важно је приметити да $\frac{1}{x}\to 0$ када $x\to\pm\infty$. По биномној формули за експонент $a=\frac{3}{5}$ имамо $\frac{f(x)}{x}=1+\binom{3/5}{1}\frac{1}{x}+\binom{3/5}{2}\frac{1}{x^2}+\cdots=1+\frac{3}{5x}-\frac{3}{25x^2}+\cdots$, дакле $f(x)=x+\frac{3}{5}-\frac{3}{25x}+\cdots\sim x+\frac{3}{5}$ када $x\to\pm\infty$. Дакле, асимптота (за $x\to\pm\infty$) је $y=x+\frac{3}{5}$.

13. Наћи косе или хоризонталне асимптоте функције $f(x)=(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$.

*Решење.* Ако $x\to\pm\infty$, онда $\frac{1}{x-1}\to 0$, па имамо $f(x)=(x+1)(1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{6(x-1)^3}+\cdots)=x+1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+1}{2(x-1)^2}+\cdots\sim x+2$ јер $\frac{x+1}{x-1}\to 1$, док сви каснији сабирци теже нули. Следи да је асимптота $y=x+2$.

14. Функција $f(x)=y$ је дата једначином $ye^y=x$. Апроксимирати функцију $f$ Маклореновим полиномом срепена 3.

*Решење.* Очигледно је $f(0)=0$. Нађимо прва три извода. Имамо $f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}=\frac{1}{(y+1)e^y}$. Даље, $f''(x)=d(\frac{1}{(y+1)e^y})/dx=d(\frac{1}{(y+1)e^y})/dy\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{y+2}{(y+1)^2e^y}\cdot\frac{1}{(y+1)e^y}=-\frac{y+2}{(y+1)^3e^{2y}}$. Најзад, $f'''(x)=d(-\frac{y+2}{(y+1)^3e^{2y}})/dx=d(-\frac{y+2}{(y+1)^3e^{2y}})/dy\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2+8y+9}{(y+1)^5e^{3y}}$.

Заменом $y=0$ (за $x=0$) налазимо $f'(0)=1$, $f''(0)=-2$ и $f'''(0)=9$, па тако добијамо Маклоренов полином $F_3(x)=x-x^2+\frac{3}{2}x^3$.

**Задаци за вежбу**

15. Одредити Тејлоров полином степена 10 за функцију (а) $f_1(x)=\dfrac{1}{x^2}$; (б) $f_2(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^2}$, у околини тачке $x=1$.

16. Користећи Маклоренов полином степена 5 за функцију $f(x)=e^{x/2}$, израчунати приближно $f(1)=\sqrt{e}$ и проценити грешку.

17. Одредити Маклоренов полином степена 5 за функцију $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

18. Одредити Тејлоров полином степена 2 око тачке $x=1$ за $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{2}}$.

19. Одредити Маклоренов полином степена 3 за $f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$.

20. Наћи константе $a$ и $b$ тако да важи $f(x) = \dfrac{1-x}{1-2x-3x^2} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{b}{1-3x}$ за све $x$. Затим развити функцију $f(x)$ у (бесконачан) Маклоренов ред.

21. Наћи константе $a$, $b$ и $c$ тако да важи $f(x) = (1-\cos x)^2 = a + b\cos x + c\cos 2x$. Затим развити функцију $f(x)$ у (бесконачан) Маклоренов ред.

22. Користећи развоје из претходна два задатка, израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1-x}{1-2x-3x^2} - \frac{1}{1-x} - 4x^2 - 12x^3}{(1-\cos x)^2}$.

23. Наћи косе (или хоризонталне) асимптоте функције $f(x) = (2x+1)e^{\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}}$.

24. Наћи косе (или хоризонталне) асимптоте функције $f(x) = x^2(\pi - 2\operatorname{arctg} x)$.

25. Наћи косе (или хоризонталне) асимптоте функције $f(x) = x^2(\ln(x+1) - \ln x)$.

**Решења**

15. $f_1(x) = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \cdots + 11(x-1)^{10} = \sum_{k=0}^{10}(-1)^k(k+1)(x-1)^k$;
$f_2(x) = 1 - 2\cdot 2(x-1) + 3\cdot 2^2(x-1)^2 - 4\cdot 2^3(x-1)^3 + \cdots + 11\cdot 2^{10}(x-1)^{10} = \sum_{k=0}^{10}(k+1)(-2)^k(x-1)^k$.

16. $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2^k\cdot k!}x^k,\ f^{(6)}(x) = \frac{1}{2^6}e^{x/2} \Rightarrow f(1) \approx 1,6487,\ R_5(1) < \frac{1}{2^5\cdot 6!} < 5\cdot 10^{-5}$.

17. $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$.

18. $1 + \frac{3}{8}(x-1) - \frac{13}{128}(x-1)^2$.

19. $1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{630}x^3$.

20. $f(x) = \frac{1-x}{1-2x-3x^2} = \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-3x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k+(-1)^k}{2}x^k = 1 + x + 5x^2 + 13x^3 + 41x^4 + \cdots$.

21. $(1-\cos x)^2 = \frac{3}{2} - 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k-1}-2}{(2k)!}x^{2k} = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \cdots$.

22. $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-x}{1-2x-3x^2} - \frac{1}{1-x} - 4x^2 - 12x^3}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x+5x^2+13x^3+41x^4+\cdots) - (1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots) - 4x^2 - 12x^3}{\frac{1}{4}x^4+\cdots} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{40x^4+\cdots}{\frac{1}{4}x^4+\cdots} = 160$.

23. $y = 2x+3$ за $x\to+\infty$ и $y = 2x-1$ за $x\to-\infty$.

24. $y = 2x$.

25. $y = x - \frac{1}{2}$.