

Група 1 - решења

1. Одредити опште решење једначине

$$xy''' + 3y'' = x^2 + 2x + 2.$$

Решење. Уведимо смену

$$y'' = z,$$

где је $z = z(x)$ нова непозната функција. Тада је

$$y''' = z',$$

па се полазна једначина своди на

$$xz' + 3z = x^2 + 2x + 2.$$

Ако претходни израз поделимо са x , добијамо

$$z' + \frac{3}{x}z = x + 2 + \frac{2}{x},$$

што представља линеарну диференцијалну једначину првог реда ($P(x) = \frac{3}{x}$, $Q(x) = x + 2 + \frac{2}{x}$). Њено опште решење је

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int P(x)dx} \left(c_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right) \\ &= e^{-\int \frac{3}{x}dx} \left(c_1 + \int \left(x + 2 + \frac{2}{x} \right) e^{\int \frac{3}{x}dx} dx \right) \\ &= e^{-3\ln|x|} \left(c_1 + \int \left(x + 2 + \frac{2}{x} \right) e^{3\ln|x|} dx \right) \\ &= \frac{1}{|x|^3} \left(c_1 + \int \left(x + 2 + \frac{2}{x} \right) |x|^3 dx \right) \\ &= \frac{1}{x^3} \left(c_1 + \int (x^4 + 2x^3 + 2x^2) dx \right) \\ &= \frac{1}{x^3} \left(c_1 + \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} \right) \\ &= \frac{c_1}{x^3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

па је

$$y'' = \frac{c_1}{x^3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}.$$

Како је $y'' = \frac{dy'}{dx}$, из претходног израза, након множења са dx , имамо

$$dy' = \left(\frac{c_1}{x^3} + \frac{x^2}{5} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \right) dx,$$

а одавде, након интеграције и сређивања израза, добијамо

$$y' = \frac{c_1}{x^2} + \frac{x^3}{15} + \frac{x^2}{4} + \frac{2x}{3} + c_2.$$

Слично, како је $y' = \frac{dy}{dx}$, из претходног израза, након множења са dx , имамо

$$dy = \left(\frac{c_1}{x^2} + \frac{x^3}{15} + \frac{x^2}{4} + \frac{2x}{3} + c_2 \right) dx,$$

и опет, након интеграције и сређивања израза, добијамо

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{x^4}{60} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{3} + c_2x + c_3,$$

што представља опште решење полазне једначине.

2. Одредити опште решење једначине

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Решење. Дата једначина је нехомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа хомогена једначина гласи

$$y'' + 4y = 0,$$

док је карактеристична једначина

$$k^2 + 4 = 0.$$

Решења карактеристичне једначине су $k_{1/2} = \pm 2i$. Ако изаберемо позитиван предзнак, добијамо фундаментални систем решења хомогене једначине који чине функције $y_1 = \cos(2x)$ и $y_2 = \sin(2x)$. Стога је опште решење хомогене једначине

$$y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x).$$

За одређивање општег решења нехомогене једначине користимо Лагранжову методу варијације произвољних константи. Опште решење нехомогене једначине тражимо у облику

$$y = c_1(x) \cos(2x) + c_2(x) \sin(2x).$$

Прво формирамо Лагранжов систем једначина:

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos(2x) + c_2'(x) \sin(2x) &= 0 \\ -2c_1'(x) \sin(2x) + 2c_2'(x) \cos(2x) &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Ако прву једначину помножимо са $2 \sin(2x)$, другу са $\cos(2x)$, а затим их саберемо, добијамо

$$2c_2'(x) = \frac{\cos(2x)}{\cos^2 x},$$

одакле следи

$$c_2'(x) = \frac{\cos(2x)}{2 \cos^2 x}$$

па је

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int c_2'(x) dx = \int \frac{\cos(2x)}{2 \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)}{2 \cos^2 x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 x} \right) dx \\ &= x - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + k_2. \end{aligned}$$

Из прве једначине Лагранжовог система је

$$c_1'(x) = -c_2'(x) \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = -\frac{\cos(2x)}{2 \cos^2 x} \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{\cos(2x)} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

па је

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int c_1'(x) dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{мена } \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln |t| + k_1 = \ln |\cos x| + k_1. \end{aligned}$$

Најзад, опште решење полазне једначине је

$$y = (\ln |\cos x| + k_1) \cos(2x) + \left(x - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + k_2\right) \sin(2x).$$

3. Одредити партикуларно решење система

$$\frac{dx}{dt} + x - y - z = 0$$

$$\frac{dy}{dt} - x + y - z = 0$$

$$\frac{dz}{dt} - x - y - z = 0$$

које испуњава услове

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.$$

Решење. Запишимо дати систем у облику

$$\dot{x} = -x + y + z$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

$$\dot{z} = x + y + z.$$

Диференцирањем прве једначине по t добијамо

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} \\ &= -(-x + y + z) + (x - y + z) + (x + y + z) \\ &= 3x - y + z. \end{aligned}$$

Диференцирањем претходног израза по t имамо

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{x}} &= 3\dot{x} - \dot{y} + \dot{z} \\ &= 3(-x + y + z) - (x - y + z) + (x + y + z) \\ &= -3x + 5y + 3z. \end{aligned}$$

Овим поступком добили смо систем

$$\dot{x} = -x + y + z$$

$$\ddot{x} = 3x - y + z$$

$$\ddot{\ddot{x}} = -3x + 5y + 3z.$$

Како бисмо из претходног система елиминисали (на пример) y , саберимо прве две једначине, а затим помножимо другу једначину са 5 и додајмо је трећој. Добијамо

$$\begin{aligned}\dot{x} + \ddot{x} &= 2x + 2z \\ 5\ddot{x} + \ddot{x} &= 12x + 8z.\end{aligned}$$

Множењем прве једначине са -4 и додавањем другој елиминишемо z и имамо

$$-4\dot{x} + \ddot{x} + \ddot{x} = 4x,$$

односно

$$\ddot{x} + \ddot{x} - 4\dot{x} - 4x = 0,$$

што представља једну хомогену линеарну диференцијалну једначину трећег реда са константним коефицијентима. Њена карактеристична једначина гласи

$$k^3 + k^2 - 4k - 4 = 0,$$

а решења карактеристичне једначине су $k_1 = -2$, $k_2 = -1$ и $k_3 = 2$. Одавде добијамо фундаментални систем решења који чине функције $y_1 = e^{-2t}$, $y_2 = e^{-t}$ и $y_3 = e^{2t}$, па следи

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}.$$

Одавде је

$$\dot{x} = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t} + 2c_3 e^{2t},$$

па је

$$\ddot{x} = 4c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + 4c_3 e^{2t}.$$

Из

$$\dot{x} + \ddot{x} = 2x + 2z$$

следи

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{2}\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x} - x \\
&= \frac{1}{2}(4c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + 4c_3e^{2t}) + \frac{1}{2}(-2c_1e^{-2t} - c_2e^{-t} + 2c_3e^{2t}) \\
&\quad - (c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3e^{2t}) \\
&= -c_2e^{-t} + 2c_3e^{2t}.
\end{aligned}$$

Из прве једначине система је

$$\begin{aligned}
y &= \dot{x} + x - z \\
&= (-2c_1e^{-2t} - c_2e^{-t} + 2c_3e^{2t}) + (c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3e^{2t}) \\
&\quad - (-c_2e^{-t} + 2c_3e^{2t}) \\
&= -c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3e^{2t}.
\end{aligned}$$

Уврштавањем услова

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0$$

у претходно добијено опште решење система

$$\begin{aligned}
x &= c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} \\
y &= -c_1e^{-2t} + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} \\
z &= -c_2e^{-t} + 2c_3e^{2t},
\end{aligned}$$

добијамо систем

$$\begin{aligned}
1 &= c_1 + c_2 + c_3 \\
0 &= -c_1 + c_2 + c_3 \\
0 &= -c_2 + 2c_3,
\end{aligned}$$

чије је решење

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{3}, \quad c_3 = \frac{1}{6}.$$

Заменом добијених c_1 , c_2 и c_3 у опште решење долазимо до траженог партикуларног решења

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} \\y &= -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} \\z &= -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}.\end{aligned}$$

1. колоквијум из Математике 3 (смене 4, 5 и 6) 12.11.2014.

Група 2 - решења

1. Одредити опште решење једначине

$$xy''' - 3y'' = x^2 - 4x + 5.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 1. задатку групе 1. На крају се добија опште решење

$$y = c_1x^5 - \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{6} + c_2x + c_3.$$

2. Одредити опште решење једначине

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 2. задатку групе 1. На крају се добија опште решење

$$y = (k_1 - \ln |\sin x|) \cos(2x) + \left(k_2 - \frac{\operatorname{ctg} x}{2} - x\right) \sin(2x).$$

3. Одредити партикуларно решење система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + x - y - z &= 0 \\ \frac{dy}{dt} - x - y - z &= 0 \\ \frac{dz}{dt} - x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

које испуњава услове

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 3. задатку групе 1, с тим што y и z замене улоге. На крају се добија тражено партикуларно решење

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} \\ y &= -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \\ z &= -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t}. \end{aligned}$$