Математика 3 - октобарски рок

23.9.2017. – група А

1. Решити диференцијалну једначину $2xy'' + y' + y = x$. Није забрањено користити смену $z(x) = y(x^2)$.

2. Класификовати векторско поље $\vec{A} = (ze^x + e^y, xe^y + e^z, ye^z + e^x)$. Одредити његов потенцијал U ако постоји, као и извод потенцијала U у тачки $M(1, -1, 0)$ у правцу вектора $\vec{v} = (2, 2, -1)$.

3. Израчунати интеграл $\int_s \sqrt{4-x}\, ds$, где је s дуж AB с крајевима $A(3, 2, 0)$ и $B(0, 1, 1)$.

4. Израчунати интеграл $\iint_{\sigma^+} 2xy\,dydz + y^2\,dzdx$, где је σ^+ горња страна дела конуса $x^2 + y^2 = z^2$ између равни $z = 0$ и $z = 1$.

Математика 3 - октобарски рок

23.9.2017. – група Б

1. Решити диференцијалну једначину $2xy'' + y' + 3y = x$. Није забрањено користити смену $z(x) = y(x^2)$.

2. Класификовати векторско поље $\vec{A} = (e^x y + e^z, e^y z + e^x, e^z x + e^y)$. Одредити његов потенцијал U ако постоји, као и извод потенцијала U у тачки $M(-1, 1, 0)$ у правцу вектора $\vec{v} = (2, 2, -1)$.

3. Израчунати интеграл $\int_s \sqrt{4-z}\, ds$, где је s дуж AB с крајевима $A(0, 2, 3)$ и $B(1, 1, 0)$.

4. Израчунати интеграл $\iint_{\sigma^+} x^2\,dydz + 2xy\,dzdx$, где је σ^+ горња страна дела конуса $x^2 + y^2 = z^2$ између равни $z = 0$ и $z = 1$.

Кратка решења

не тврдим да су безгрешна

1. Ако је $z(x) = y(x^2)$, онда је $z'(x) = 2xy'(x^2)$ и $z''(x) = 4x^2y''(x^2) + 2y'(x^2)$.

   Група А. Ако у једначини $2xy'' + y' + y = x$ заменимо x са x^2, добијамо $2x^2y''(x^2) + y'(x^2) + y(x^2) = x^2$, тј. $\frac{1}{2}z''(x) + z(x) = x^2$. То је сад једначина са константним коефицијентима коју ваљда умемо да решимо: $z_h(x) = C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x)$ и $z_p(x) = x^2 - 1$, дакле $z(x) = x^2 - 1 + C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x)$. Најзад, $y(x) = z(\sqrt{x}) = x - 1 + C_1 \cos\sqrt{2x} + C_2 \sin\sqrt{2x}$.

   Група Б. У овом случају једначина по z је $\frac{1}{2}z''(x) + 3z(x) = x^2$. Тако на исти начин добијамо решење $y(x) = z(\sqrt{x}) = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + C_1 \cos\sqrt{6x} + C_2 \sin\sqrt{6x}$.

2. *Група Б.* Имамо $\operatorname{div}\vec{A} = e^x y + e^y z + e^z x$ и $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$, па је ово потенцијално поље. Његов потенцијал U тада постоји и важи $\operatorname{grad} U = \vec{A}$. Одмах знамо и извод U у правцу вектора $\vec{v}$: он је $\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad} U(M) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{A}(M) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (\frac{1}{e} + 1, \frac{1}{e}, e - 1) \cdot \frac{1}{3}(2, 2, -1) = \frac{1}{3}(3 - e + \frac{4}{e})$.

   Сад нађимо и U. Пошто је $U_x = e^x y + e^z$, имамо $U = \int U_x dx = e^x y + e^z x + f(y, z)$. Даље, $U_y = e^x + f_y(y, z) = e^y z + e^x$, па је $f_y(y, z) = e^y z$, тј. $f(y, z) = \int f_y dy = e^y z + g(z)$ и одатле $U = e^x y + e^y z + e^y z + g(z)$. Сада је $U_z = e^z x + e^y + g'(z) = e^z x + e^y$, па је $g = C = \text{const}$ и $U = e^x y + e^y z + e^y z + C$.

   Група А. Слично добијамо $\operatorname{div}\vec{A} = e^x z + e^y x + e^z y$ и $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{0}$, поље $\vec{A}$ је потенцијално и $U = e^x z + e^y x + e^z y$, и $\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{v}} = \frac{1}{3}(3 - e + \frac{4}{e})$.

3. *Група А.* Прво параметризујемо дуж AB: она је дата једначином $A + t \cdot \overrightarrow{AB} = (3, 2, 0) + t(-3, -1, 1) = (3 - 3t, 2 - t, t)$. Сада је $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \sqrt{11}\, dt$ и $\sqrt{4 - x} = \sqrt{1 + 3t}$, па је тражени интеграл $I = \int_0^1 \sqrt{1 + 3t}\sqrt{11}\, dt \overset{\begin{smallmatrix} u=1+3t \\ du=3dt \end{smallmatrix}}{=} \frac{\sqrt{11}}{3} \int_1^4 u^{1/2} du = \frac{\sqrt{11}}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2}\big|_1^4 = \frac{14\sqrt{11}}{9}$.

   Група Б. У односу на групу A, само су места променљивих x и z замењена.

4. Група Б. Пројекција дате површи σ^+ на xy-раван је диск $D\{x^2+y^2\leqslant 1\}$, а нормала на σ^+ је $\vec{n}=(-z_x,-z_y,1)=(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1)$. Тако је тражени интеграл једнак $I=\iint_D[x^2(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})+2xy(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})+0\cdot 1]dxdy=-\iint_D\frac{x^3+2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$. Преласком на поларне координате $\left|\begin{smallmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{smallmatrix}\right|$ добијамо $I=-\int_0^1 r^3dr\int_0^{2\pi}(2\cos\varphi-\cos^3\varphi)d\varphi=0$.

Група А. Замењена места x и y. Резултат је и овде 0.