

Prvi zadatak sa Trećeg kolokvijuma za studente 1. i 2. smene
(A. Pejčev/D. Djukić)

Brzinsko polje nestišljivog fluida je $\vec{A} = (x+y)(x+z) \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)$. Naći protok ovog fluida kroz unutrašnju stranu dela sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ ispod ravni $z = 1$.

Rešenje zadatka

Imamo $\vec{A} = (P, Q, R)$ za $P = Q = R = (x+y)(x+z) = x^2 + xy + xz + yz$ i $\text{div} \vec{A} = (2x + y + z) + (x + z) + (y + z) = 3x + 2y + 3z$.

Datu površ S zatvorimo diskom $D : ((x-2)^2 + y^2 \leq 3, z = 1)$. Disk D se parametrizuje kao $x = 2 + r \cos(t)$, $y = r \sin(t)$, $z = 1$ ($r \leq \sqrt{3}$, $0 \leq t \leq 2\pi$).

Protok vektorskog polja $\vec{A}$ kroz gornju stranu diska D je

$$I_1 = \iint_D (x^2 + xy + x + y) dx dy = \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{2\pi} (4 + r^2 \cos^2(t) + 2)r dt = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (12r + r^3) dr = \frac{81}{4}\pi.$$

S druge strane, protok I_0 kroz spoljnu stranu površi $S \cup D$ ćemo izračunati primenom teoreme Gaus-Ostrogradskog. Unutrašnjost V ove površi se parametrizuje kao $x = 2 + r \sin t \cos u$, $y = r \sin t \sin u$, $z = r \cos t$, uz uslove $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq t \leq \pi$, $0 \leq u \leq 2\pi$ i $r \cos t \leq 1$. Ovaj uslov nije baš prijatan, obratiti pažnju na to kako integral moramo da delimo na dva dela: r treba istovremeno da bude manje ili jednako $1/\cos t$ i 2, što znači da tamo gde je $1/\cos t \leq 2$ (odnosno $\cos t \geq 0.5$, $t \leq \pi/3$) r ide od 0 do $1/\cos t$, dok tamo gde je $1/\cos t \geq 2$ (tj. $t \in (\pi/3, \pi)$) r ide od 0 do 2. Sledi da je

$$\begin{aligned} I_0 &= \iiint_V (3x + 2y + 3z) dx dy dz = \iiint (6 + 3r \sin t \cos u + 2r \sin t \sin u + 3r \cos t) dx dy dz \\ &= 6\pi \iint_{r \cos t \leq 1} (2r^2 \sin t + r^3 \sin t \cos t) dr dt \\ &= 6\pi \int_{\pi/3}^{\pi} dt \int_0^2 (2r^2 \sin t + r^3 \sin t \cos t) dr + 6\pi \int_0^{\pi/3} dt \int_0^{1/\cos t} (2r^2 \sin t + r^3 \sin t \cos t) dr \\ &= 8\pi \int_{\pi/3}^{\pi} (4 \sin t + \frac{3}{2} \sin 2t) dt + \frac{11}{2}\pi \int_0^{\pi/3} \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt \\ &= 8\pi \cdot \frac{39}{8} + \frac{11}{2}\pi \cdot \frac{3}{2} = \frac{189}{4}\pi. \end{aligned}$$

Sledi da je protok kroz unutrašnju stranu površi S jednak $-(I_0 - I_1) = -27\pi$.