

Математика 3 - јануарски рок

20.1.2018. – група А

1. Наћи опште решење $x(t), y(t)$ система
$$\begin{cases} x' = 3x - 2y + \cos t, \\ y' = 5x - 3y. \end{cases}$$
2. Одредити векторске линије векторског поља $\vec{A} = (x, 3y - z, z - x - 3y)$. За коју вредност параметра a је поље $\vec{v} \times \vec{A}$ вртложно, где је $\vec{v} = (1, a, 1)$?
3. Нека је S део површи $z = x^2 + xy + y^2$ у области $y \geq x \geq 0$ који лежи унутар цилиндра $x^2 + y^2 = 1$. Израчунати интеграл
$$\iint_S \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} dS.$$
4. Наћи запремину тела задатог условима $-1 \leq xy \leq 1$, $-1 \leq xz \leq 1$ и $-1 \leq yz \leq 1$ у координатном простору.

Математика 3 - јануарски рок

20.1.2018. – група Б

1. Наћи опште решење $x(t), y(t)$ система
$$\begin{cases} x' = -3x + 5y, \\ y' = -2x + 3y + \cos t. \end{cases}$$
2. Одредити векторске линије векторског поља $\vec{A} = (3x - z, y, z - 3x - y)$. За коју вредност параметра a је поље $\vec{v} \times \vec{A}$ вртложно, где је $\vec{v} = (a, 1, 1)$?
3. Нека је S део површи $z = x^2 + xy + y^2$ у области $x \geq y \geq 0$ који лежи унутар цилиндра $x^2 + y^2 = 1$. Израчунати интеграл
$$\iint_S \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dS.$$
4. Наћи запремину тела задатог условима $-1 \leq xy \leq 1$, $-1 \leq xz \leq 1$ и $-1 \leq yz \leq 1$ у координатном простору.

Кратка решења

не тврдим да су безгрешна

1. Група А. Имамо $x'' = 3x' - 2y' - \sin t = 3(3x - 2y + \cos t) - 2(5x - 3y) - \sin t = -x + 3 \cos t - \sin t$, тј. $x'' + x = 3 \cos t - \sin t$. Хомогено решење ове једначине је $x_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, а партикуларно има облик $x_p = t(A \cos t + B \sin t)$. Пошто је тада $x_p'' + x_p = 2B \cos t - 2A \sin t$, следи да је $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ и $x = x_p + x_h = (\frac{1}{2}t + C_1) \cos t + (\frac{3}{2}t + C_2) \sin t$.

Прве једначина система даје $y = \frac{1}{2}(3x - x' + \cos t) = \frac{6C_1 - 2C_2 + 1}{4} \cos t + (\frac{5}{2}t + \frac{6C_2 + 2C_1 - 3}{4}) \sin t$.

Група Б. У односу на групу А, замењена су места x и y . У овом случају добија се $x'' + x = 5 \cos t$, те је $x = C_1 \cos t + (\frac{5}{2}t + C_2) \sin t$, док је $y = \frac{1}{5}(x' + 3x) = \frac{t + 6C_1 + 2C_2}{2} \cos t + \frac{3t + 6C_2 - 2C_1 + 1}{2} \sin t$.

2. Група Б. Векторске линије одређујемо решавањем система $\frac{dx}{3x - z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - 3x - y} = dt$. Као прво, $dt = \frac{dx + dy + dz}{(3x - z) + y + (z - 3x - y)} = \frac{dx + dy + dz}{0}$, па је $dx + dy + dz = 0$, тј. $x + y + z = C_1$. Даље, $z = C_1 - x - y$, па прва једнакост у систему постаје $\frac{dx}{4x + y - C_1} = \frac{dy}{y}$, тј. $\frac{dx}{dy} = \frac{4x + y - C_1}{y} = \frac{4}{y} \cdot x + (1 - \frac{C_1}{y})$. Ово је линеарна једначина по $x = x(y)$ чије је решење $12x + 4y - 3C_1 = C_2 y^4$, тј. $\frac{9x + y - 3z}{y^4} = C_2$.

Осим тога, $\vec{v} \times \vec{A} = (-3x - 2y + z, (3a + 3)x + ay - z, -3x + ay + z)$ и $\text{div}(\vec{v} \times \vec{A}) = a - 2$, што је нула за $a = 2$ и тада је поље вртложно.

Група А. Замењена места x и y : дакле, $x + y + z = C_1$ и $\frac{x + 9y - 3z}{x^4} = C_2$. Поље је вртложно за $a = 2$ јер је $\text{div}(\vec{v} \times \vec{A}) = \text{div}(ax + (3a + 3)y - z, -2x - 3y + z, ax - 3y + z) = a - 2$.

3. Група А. Имамо $z'_x = 2x + y$, $z'_y = x + 2y$ и $dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy = \sqrt{1 + 5x^2 + 5y^2 + 8xy} dx dy$. Уводимо поларне координате: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi = -\cos 2\varphi$ и $dS = r \sqrt{1 + 5r^2 + 4r^2 \sin 2\varphi} dr d\varphi$. Границе за r и φ одређујемо из услова: $r \leq 1$ и $y \geq x \geq 0 \Rightarrow \sin \varphi > \cos \varphi > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Сада се тражени интеграл своди на $I = - \int_0^1 dr \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + 5r^2 + 4r^2 \sin 2\varphi} r \cos 2\varphi d\varphi$. Унутрашњи интеграл је $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + 5r^2 + 4r^2 \sin 2\varphi} r \cos 2\varphi d\varphi = \left|_{dt=8r^2 \cos 2\varphi}^{t=1+5r^2+4r^2 \sin 2\varphi} \right| = \frac{1}{8r} \int_{1+9r^2}^{1+5r^2} \sqrt{t} dt = \frac{1}{12r} ((1 + 5r^2)^{3/2} - (1 + 9r^2)^{3/2})$, тако да је $I = \frac{1}{12} \left[\int_0^1 \frac{1}{r} (1 + 9r^2)^{3/2} dr - \int_0^1 \frac{1}{r} (1 + 5r^2)^{3/2} dr \right] = \left|_{dt=2r}^{t=r^2} \right| = \frac{1}{24} \left[\int_0^1 (1 + 9t)^{3/2} \frac{dt}{t} - \int_0^1 (1 + 5t)^{3/2} \frac{dt}{t} \right]$. Коначно решење је $\frac{1}{36} (13\sqrt{10} - 9\sqrt{6} + 3 \ln(1 + \sqrt{6}) - 3 \ln(1 + \sqrt{10})) \approx 0,513908$.

Група Б. Замењена места x и y , исто решење.

4. Читава коцка $-1 \leq x, y, z \leq 1$ припада посматраном телу, а њена запремина је 8. Остаје да измеримо део тела ван ове коцке.

Нека је V_{x+} део тела у области $x > 1$, а V_{x-} део тела у области $x < -1$. Слично дефинишемо и делове тела $V_{y+}, V_{z+}, V_{y-}, V_{z-}$. Никоја два од ових шест делова немају пресечних тачака: ако је нпр. $x > 1$ и $y > 1$, онда је $xy > 1$. Сада одредимо њихове запремине. За дато $x > 1$ важи $-\frac{1}{x} < y, z < \frac{1}{x}$, тј. попречни пресек тела је заправо квадрат странице $\frac{2}{x}$ и површине $\frac{4}{x^2}$. Тако је запремина дела V_{x+} једнака $\int_1^\infty \frac{4dx}{x^2} = 4$. Исте запремине имају и преосталих пет делова. Према томе, запремина целог тела је $V = 8 + 6 \cdot 4 = 32$.

Друго решење. Због симетрије, довољно је израчунати запремину V дела тела у области $x \geq y \geq 0, z \geq 0$ и резултат помножити са 16. Пошто је $xy \leq 1$, за $0 < x \leq 1$ границе за y су $0 \leq y \leq x$, а за $1 < x < \infty$ границе за y су $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$. Такође, пошто је $1 \geq xz \geq yz$, границе за z су $0 \leq z \leq \frac{1}{x}$. Према томе, $V = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{1/x} dz + \int_1^\infty dx \int_0^{1/x} dy \int_0^{1/x} dz = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{x} dy + \int_1^\infty dx \int_0^{1/x} \frac{1}{x} dy = \int_0^1 1 dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 2$. Дакле, укупна запремина тела је $16 \times 2 = 32$.