Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

Математика 3 - јунски рок

16.6.2018. – група А

Душан Ђукић

1. Наћи опште решење једначине $(\frac{1}{4}+e^{-2x})y''+y'+y=0$ ако је познато да оно има облик $y(x)=(C_1+C_2x)y_0(x)$, где је $y_0(x)$ једно партикуларно решење, а C_1 и C_2 произвољне константе.
2. Одредити константу γ за коју је векторско поље $\vec{A}=e^{\gamma xy}(2y^2-2yz, 2xy-2xz+1, -1)$ потенцијално. Наћи извод потенцијала у тачки $M(0,0,0)$ у правцу вектора $\vec{v}=(1,3,-2)$.
3. Површ S је дата једначином $z=\sqrt{2xy}$ за $0\leqslant x\leqslant 2$ и $0\leqslant y\leqslant 1$. Израчунати интеграл $\iint_S \sqrt{x+2y-2z}\,dS$.
4. Нека је S^+ спољна граница коцке $0\leqslant x,y,z\leqslant 2$. Израчунати $\iint_{S^+} x\,dydz-2y\,dzdx+3z\,dxdy$.

Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

Математика 3 - јунски рок

16.6.2018. – група Б

Душан Ђукић

1. Наћи опште решење једначине $(\frac{1}{4}-e^{-2x})y''+y'+y=0$ ако је познато да оно има облик $y(x)=(C_1+C_2x)y_0(x)$, где је $y_0(x)$ једно партикуларно решење, а C_1 и C_2 произвољне константе.
2. Одредити константу γ за коју је векторско поље $\vec{A}=e^{\gamma xy}(2y^2+2yz, 2xy+2xz+1, 1)$ потенцијално. Наћи извод потенцијала у тачки $M(0,0,0)$ у правцу вектора $\vec{v}=(1,3,2)$.
3. Површ S је дата једначином $z=\sqrt{2xy}$ за $0\leqslant x\leqslant 1$ и $0\leqslant y\leqslant 2$. Израчунати интеграл $\iint_S \sqrt{2x+y-2z}\,dS$.
4. Нека је S^+ спољна граница коцке $0\leqslant x,y,z\leqslant 2$. Израчунати $\iint_{S^+} x\,dydz+3y\,dzdx-2z\,dxdy$.

Кратка решења

не тврдим да су безгрешна

1. *Група А.* Означимо $P=\frac{1}{4}+e^{-2x}$. По услову, $y=y_0$ и $y=xy_0$ су решења диференцијалне једначине $Py''+y'+y=0$. Имамо $(xy_0)'=xy_0'+y_0$ и $(xy_0)''=xy_0''+2y_0'$. Према томе, $Py_0''+y_0'+y_0=0$ и $P(xy_0)''+(xy_0)'+xy_0=xPy_0''+(2P+x)y_0'+(x+1)y_0=0$. Када од друге једначине одузмемо прву помножену са x, добијамо $2Py_0'+y_0=0$, што је обична једначина са раздвојеним промењивим. Сада је $\frac{-2dy_0}{y_0}=\frac{dx}{P}$, а одатле интеграцијом $-2\ln|y_0|=\int\frac{dx}{\frac{1}{4}+e^{-2x}}=2\ln(e^{2x}+4)+\text{const}$, те је $y_0=\frac{C}{e^{2x}+4}$.

   Према томе, опште решење једначине из задатка је $y=\frac{C_1+C_2x}{e^{2x}+4}$.

   Група Б. Поступак је исти, а добија се решење $y=\frac{C_1+C_2x}{e^{2x}-4}$.

2. *Група Б.* Поље $\vec{A}$ је потенцијално ако је његов ротор нула. Како је $\operatorname{rot}\vec{A}=(\gamma-2)e^{\gamma xy}(x,-y,y)$, што је нула само за $\gamma=2$, одговор је $\gamma=2$.

   Ако је U потенцијал, онда је $\operatorname{grad}U=\vec{A}$. Извод потенцијала у тачки M у правцу $\vec{v}$ је $\operatorname{grad}U(M)\cdot\vec{v}=\vec{A}(M)\cdot(1,3,-2)=(0,0,1)\cdot(1,3,-2)=-2$. Нема потребе да одређујете потенцијал.

   Група А. Овде је z замењено са $-z$, а одговори су исти као у групи Б.

3. *Група А.* Имамо $dS=\sqrt{1+{z'}_x^2+{z'}_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}}\,dxdy=\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}dxdy$. Такође добијамо $\sqrt{x+2y-2z}=\sqrt{x+2y-2\sqrt{2xy}}=|\sqrt{x}-\sqrt{2y}|$. Тражени интеграл постаје $I=\iint_D\frac{(x+y)|\sqrt{x}-\sqrt{2y}|}{\sqrt{2xy}}dxdy$, где је $D=[0,2]\times[0,1]$. Област D делимо на два дела: $D_1=\{(x,y)\in D\mid x<2y\}$ и $D_2=\{(x,y)\in D\mid x\geqslant 2y\}$.

   Интеграл по D_1 је $I_1=\iint_{D_1}\frac{(x+y)(\sqrt{2y}-\sqrt{x})}{\sqrt{2xy}}\,dxdy=\int_0^1dy\int_0^{2y}(-\frac{x}{\sqrt{2y}}+\sqrt{x}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{x}})\,dx=\int_0^1dy(-\frac{x^2}{\sqrt{8y}}+\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{2}}+2y\sqrt{x})|_{x=0}^{x=2y}=\int_0^1\frac{4}{3}\sqrt{2}y^{3/2}dy=\frac{8}{15}\sqrt{2}$.

   Слично, интеграл по D_2 је $I_2=\iint_{D_2}\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{2y})}{\sqrt{2xy}}\,dxdy=\int_0^1dy\int_{2y}^2(\frac{x}{\sqrt{2y}}-\sqrt{x}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{x}})\,dx=\int_0^1dy(\frac{x^2}{\sqrt{8y}}-\frac{2x^{3/2}}{3}+\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{2}}-2y\sqrt{x})|_{x=2y}^{x=2}=\int_0^1\sqrt{2}(y^{-1/2}-\frac{4}{3}+\sqrt{y}-y-\frac{4}{3}y^{3/2})dy=\sqrt{2}(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{8}{15})=\frac{3}{10}\sqrt{2}$.

   Коначан резултат је $I=I_1+I_2=\frac{5}{6}\sqrt{2}$.

   Група Б. Исто решење, само x и y мењају места.

4. *Група Б.* Са V означавамо унутрашњост коцке. По теореми Гаус-Остроградског, тражени интеграл је једнак $\iiint_V(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial(3y)}{\partial y}+\frac{\partial(-2z)}{\partial z})dxdydz=\iiint_V 2\,dxdydz=16$.

   Група А. Промењиве y и z су замениле места. Решење је исто.