Rešenja

1. grupa

1. Divergencija polja $\vec{A}$ je

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{A} &= \nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (2x, z, 3x^2 + 4yz^3) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}z + \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 + 4yz^3)\\ &= 2 + 0 + 12yz^2 = 2(1 + 6yz^2),\end{aligned}$$

a divergencija polja $\vec{A}$ u tački X je

$$\operatorname{div}\vec{A}(X) = 2.$$

Rotor polja $\vec{A}$ je

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x & z & 3x^2 + 4yz^3 \end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4yz^3) - \frac{\partial}{\partial z}z\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 4yz^3) - \frac{\partial}{\partial z}(2x)\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}z - \frac{\partial}{\partial y}(2x)\right)\vec{k}\\ &= (4z^3 - 1)\,\vec{i} - (6x - 0)\,\vec{j} + (0 - 0)\,\vec{k} = (4z^3 - 1)\,\vec{i} - 6x\,\vec{j},\end{aligned}$$

a rotor polja $\vec{A}$ u tački X je

$$\operatorname{rot}\vec{A}(X) = -\vec{i}.$$

2. Telo je odozdo ograničeno paraboloidom, a odozgo konusom. Te dve površi se seku po krivoj L za koju je jasno da pripada ravni paralelnoj sa Oxy i čiju jednačinu možemo odrediti (tj. zapisati na adekvatniji način, jednačina te krive je već na jedan način zadata jednačinama površi u preseku kojih nastaje). Eliminacijom $x^2 + y^2$ iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} z &= 1 + x^2 + y^2,\\ z &= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Imamo

$$\begin{aligned} z &= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{z - 1},\\ z - 2 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{z - 1},\end{aligned}$$

što nam nakon kvadriranja daje kvadratnu jednačinu

$$3z^2 - 16z + 16 = 0,$$

čija su rešenja $z = 4$ i $z = \frac{4}{3}$, pri čemu drugo rešenje ne dolazi u obzir pošto je zbog jednačine konusa $z \geq 2$. Dakle, kriva L je data sa $z = 4$, $x^2 + y^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$, te je njena projekcija na ravan Oxy kružnica $x^2 + y^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$.

Telo je ograničeno delom paraboloida $z_1 = 1 + x^2 + y^2$, za koji je

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

i delom konusa $z_2 = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}$ za koji je

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{3}},$$

pri čemu se oba ta dela jednoznačno projektuju u krug $G = \left\{(x,y)|\, x^2+y^2 \le (\sqrt{3})^2\right\}$ ravni Oxy, odnosno $G' = \{(\rho,\varphi)|\, 0 \le \rho \le \sqrt{3},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ u polarnim koordinatama. Zato je

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_G \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy + \iint\limits_G \sqrt{\frac{7}{3}}\,dx\,dy = \iint\limits_G \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi + \sqrt{\frac{7}{3}}\,P(G) \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho + \sqrt{21}\pi = 2\pi\ \frac{1}{8}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{13} + \sqrt{21}\pi = \frac{\pi}{4}(13\sqrt{13}-1) + \sqrt{21}\pi. \end{aligned}$$

Pred kraj je iskorišćena smena $1+4\rho^2 = t,\ dt = 8\rho\,d\rho$.

3. Rešava se na isti način kao 3. zadatak 2. grupe, s tim što je ovde donja granica $(1,1)$, pa je rešenje $\ln(13/\sqrt{2})$.

---

2. grupa

1. Videti rešenje 1. zadatka 1. grupe. Ovde je $X = (1,0,1)$, pa je $\mathrm{div}\vec{A}(X) = 2$, $\mathrm{rot}\vec{A}(X) = 3\,\vec{i} - 6\,\vec{j}$.

2. Rešava se na isti način kao 2. zadatak 1. grupe, s tim što je ovde x zamenjeno sa y, y sa z, i z sa x. Telo se projektuje u ravan yOz. Rezultat je isti.

3. Primetimo da važi

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

pa dati krivolinijski integral možemo računati kao

$$I = \int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x dx + y dy}{x^2+y^2} = \int_{(3,4)}^{(5,12)} du,$$

gde je

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy.$$

Nakon integracije izraza

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

dobijamo

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c(y),$$

pa je

$$\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + c'(y),$$

odnosno

$$c'(y) = 0$$

odakle sledi

$$c(y) = C,$$

gde je $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Na osnovu prethodnog je

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + C,$$

pa je

$$\begin{aligned} I &= \int_{(3,4)}^{(5,12)} d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C\right) = \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C\right)\Bigg|_{(3,4)}^{(5,12)} \\ &= \frac{1}{2}\ln(5^2 + 12^2) + C - \frac{1}{2}\ln(3^2 + 4^2) - C = \ln\frac{13}{5}. \end{aligned}$$

Funkciju u smo mogli odrediti i direktno, pošto je

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = d\ln\sqrt{x^2 + y^2} = du.$$