Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

Математика 3 - септембарски рок

1.9.2018. – група А

Душан Ђукић

1. Решити диференцијалну једначину $y'' + y'^2 + 2xy'^3 = e^{2y}y'^3$ уз почетне услове $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Није забрањено користити смену $x = x(y)$.
2. Наћи вредност параметра a за коју је векторско поље $\vec{A} = (x+y+z)^a(4x-2y, 7x+y+3z, 6x+2z)$ потенцијално. За ту вредност a одредити извод потенцијала поља $\vec{A}$ у тачки $M(1,1,1)$ у правцу вектора $(1,4,-8)$.
3. Одредити запремину дела елипсоида $x^2 + y^2 + 3z^2 \leqslant 9$ датог условом $0 \leqslant x \leqslant z$.
4. Израчунати површински интеграл $\iint_S y^2 z\, dS$, где је S површ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ испод равни $z = 2$.

Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

Математика 3 - септембарски рок

1.9.2018. – група Б

Душан Ђукић

1. Решити диференцијалну једначину $y'' + y'^2 + 2xy'^3 = e^{2y}y'^3$ уз почетне услове $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. Није забрањено користити смену $x = x(y)$.
2. Наћи вредност параметра a за коју је векторско поље $\vec{A} = (x+y+z)^a(x+7y+3z, 4y-2x, 6y+2z)$ потенцијално. За ту вредност a одредити извод потенцијала поља $\vec{A}$ у тачки $M(1,1,1)$ у правцу вектора $(4,1,-8)$.
3. Одредити запремину дела елипсоида $x^2 + y^2 + 3z^2 \leqslant 9$ датог условом $0 \leqslant y \leqslant z$.
4. Израчунати површински интеграл $\iint_S x^2 z\, dS$, где је S површ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ испод равни $z = 2$.

Кратка решења

не тврдим да су безгрешна

1. *Група А.* Напишимо дату једначину као једначину по $x = x(y)$: како је $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{x'}$ и $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(1/x')}{dx} = \frac{d(1/x')}{dy} \cdot (\frac{dx}{dy})^{-1} = -\frac{x''}{x'^2} \cdot \frac{1}{x'} = -\frac{x''}{x'^3}$, дата једначина постаје $-\frac{x''}{x'^3} + \frac{1}{x'^2} + \frac{2x}{x'^3} = \frac{e^{2y}}{x'^3}$, тј. $x'' - x' - 2x = -e^{2y}$. Хомогено решење ове једначине је $x_h(y) = C_1e^{2y} + C_2e^{-y}$, а партикуларно има облик $x_p(y) = Aye^{2y}$. Лако налазимо $A = -\frac{1}{3}$, те је $x = x_p + x_h = (-\frac{1}{3}y + C_1)e^{2y} + C_2e^{-y}$.

   Најзад, за $x = 0$ важи $y = 0$, $y' = \frac{1}{x'} = 1$, одакле добијамо $x(0) = C_1 + C_2 = 0$ и $x'(0) = 2C_1 - \frac{1}{3} + C_2 = 1$. Следи $C_1 = \frac{4}{3}$ и $C_2 = -\frac{4}{3}$, дакле $x = \frac{4-y}{3}e^{2y} - \frac{4}{3}e^{-y}$.

   Група Б. Опште решење је исто: $x = (-\frac{1}{3}y + C_1)e^{2y} + C_2e^{-y}$, а коначно је $x = -\frac{2+y}{3}e^{2y} + \frac{2}{3}e^{-y}$.

2. *Група Б.* Сличан задатак је био у јуну, ваљда сте научили? Како је $\operatorname{rot}\vec{A} = (a+3)(x+y+z)^a \cdot (-2,-1,3)$, што је нула само за $a = -3$, одговор је $a = -3$. Даље, ако је U потенцијал, његов извод у тачки M у правцу $\vec{v} = (4,1,-8)$ је $\operatorname{grad} U(M) \cdot \frac{\vec{v}}{|v|^2} = \vec{A}(M) \cdot \frac{1}{9}(4,1,-8) = \frac{1}{243}(10,2,8) \cdot (4,1,-8) = -\frac{22}{243}$.

   Група А. Овде су x и y заменили места, а одговори су исти као у групи Б.

3. *Група А.* Поставићемо уопштене сферне координате: $x = 3r\sin\theta\cos\varphi$, $z = \sqrt{3}r\sin\theta\sin\varphi$, $y = 3r\cos\theta$, при чему је $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Згодно је поставити их на овај начин, јер тада услов $0 \leqslant x \leqslant z$ постаје једноставан: $0 \leqslant \sqrt{3}\cos\varphi \leqslant \sin\varphi$, тј. $\frac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Сада је запремина $V = \iiint_V dxdydz = 9\sqrt{3}\int_0^1 r^2\, dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi = \pi\sqrt{3}$.

   Група Б. Исто решење, само x и y мењају места.

4. *Група Б.* Имамо $dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \sqrt{1+(\frac{x}{z})^2+(\frac{y}{z})^2}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy$, па је $I = \sqrt{2}\iint_S x^2\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$. Преласком на поларне координате $\left\{\begin{matrix} x = 2r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{matrix}\right\}$ $(0 \leqslant r \leqslant 1)$ добијамо $I = 2\sqrt{2}\int_0^1 r^4\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}$.

   Група А. Променљиве x и y су замениле места. Решење је исто.