

## Drugi kolokvijum iz predmeta Numeričke metode 1. GRUPA

1. a) Gausovom metodom eliminacije sa izborom glavnog elementa, rešiti sistem

$$0.28x_1 + 3.84x_2 + 0.43x_3 + 0.62x_4 = 4.36$$

$$0.57x_1 + 0.43x_2 + 3.42x_3 + 0.52x_4 = 4.32$$

$$4.32x_1 + 0.28x_2 + 0.57x_3 + 0.87x_4 = 2.17$$

$$0.87x_1 + 0.62x_2 + 0.52x_3 + 3.30x_4 = 4.48.$$

Rešenje priložiti na 4 značajne cifre.

- b) Ispitati da li se na sistem dat pod a) može primeniti Gaus-Seidelova metoda i u slučaju potvrdnog odgovora rešiti sistem i ovom metodom sa tačnošću  $10^{-3}$ .

*Rešenje:*

- a) Transformacijom dato sistema (uvek biramo promenljivu pomnoženu koeficijentom koji ima najveću apsolutnu vrednost) dobijamo

$$\begin{array}{rcll}
 0.28x_1 & + & 3.84x_2 & + & 0.43x_3 & + & 0.62x_4 & = & 4.36 & \leftarrow + \\
 0.57x_1 & + & 0.43x_2 & + & 3.42x_3 & + & 0.52x_4 & = & 4.32 & \leftarrow + \\
 \boxed{4.32x_1} & + & 0.28x_2 & + & 0.57x_3 & + & 0.87x_4 & = & 2.17 & \leftarrow -0.0648 \quad \leftarrow -0.1319 \quad \leftarrow 0.2014 \\
 0.87x_1 & + & 0.62x_2 & + & 0.52x_3 & + & 3.30x_4 & = & 4.48 & \leftarrow +
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{rcll}
 \boxed{3.8219x_2} & + & 0.3931x_3 & + & 0.5636x_4 & = & 4.2194 & \leftarrow -0.1029 \quad \leftarrow -0.1475 \\
 \Leftrightarrow 0.3931x_2 & + & 3.3448x_3 & + & 0.4052x_4 & = & 4.0337 & \leftarrow + \\
 0.5636x_2 & + & 0.4052x_3 & + & 3.1248x_4 & = & 4.0430 & \leftarrow +
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{rcll}
 3.3044x_3 & + & 0.3472x_4 & = & 3.5997 & \leftarrow -0.1051 \\
 \Leftrightarrow \boxed{0.3472x_3} & + & 3.0417x_4 & = & 3.4208 & \leftarrow +
 \end{array}$$
  

$$\Leftrightarrow 3.0052x_4 = 3.0426,$$

odakle sledi  $x_4 = 1.0124$ ,  $x_3 = 0.9832$ ,  $x_2 = 0.8536$ ,  $x_1 = 0.1134$ .

b) Dati sistem prvo treba da prezapišemo tako da njegova matrica bude dijagonalno dominantna

$$\begin{aligned}4.32x_1 + 0.28x_2 + 0.57x_3 + 0.87x_4 &= 2.17 \\0.28x_1 + 3.84x_2 + 0.43x_3 + 0.62x_4 &= 4.36 \\0.57x_1 + 0.43x_2 + 3.42x_3 + 0.52x_4 &= 4.32 \\0.87x_1 + 0.62x_2 + 0.52x_3 + 3.30x_4 &= 4.48.\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}4.32 &> 0.28 + 0.57 + 0.87 \\3.84 &> 0.28 + 0.43 + 0.62, \\3.42 &> 0.43 + 0.57 + 0.52, \\3.30 &> 0.87 + 0.62 + 0.52,\end{aligned}$$

na dati sistem se Gaus-Seidelova metoda zaista može primeniti i glasiće

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4.32} \left( 2.17 - 0.28x_2^{(k)} - 0.57x_3^{(k)} - 0.87x_4^{(k)} \right) \\x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3.84} \left( 4.36 - 0.28x_1^{(k+1)} - 0.43x_3^{(k)} - 0.62x_4^{(k)} \right) \\x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{3.42} \left( 4.32 - 0.57x_1^{(k+1)} - 0.43x_2^{(k+1)} - 0.52x_4^{(k)} \right) \\x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{3.30} \left( 4.48 - 0.87x_1^{(k+1)} - 0.62x_2^{(k+1)} - 0.52x_3^{(k+1)} \right)\end{aligned}$$

Ako se za polaznu iteraciju npr. uzme

$$x_1^{(0)} = \frac{2.17}{4.32} = 0.5023, \quad x_2^{(0)} = \frac{4.36}{3.84} = 1.1354, \quad x_3^{(0)} = \frac{4.32}{3.42} = 1.2632, \quad x_4^{(0)} = \frac{4.48}{3.30} = 1.3576,$$

dobija se

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -0.0114, \quad x_2^{(1)} = 0.7756, \quad x_3^{(1)} = 0.9611, \quad x_4^{(1)} = 1.0634, \\x_1^{(2)} &= 0.1111, \quad x_2^{(2)} = 0.8480, \quad x_3^{(2)} = 0.9763, \quad x_4^{(2)} = 1.0151. \\x_1^{(3)} &= 0.1141, \quad x_2^{(3)} = 0.8539, \quad x_3^{(3)} = 0.9824, \quad x_4^{(3)} = 1.0123. \\x_1^{(4)} &= 0.1135, \quad x_2^{(4)} = 0.8537, \quad x_3^{(4)} = 0.9830, \quad x_4^{(4)} = 1.0124, \\x_1^{(5)} &= 0.1134, \quad x_2^{(5)} = 0.8536, \quad x_3^{(5)} = 0.9830, \quad x_4^{(5)} = 1.0124, \\x_1^{(6)} &= 0.1134, \quad x_2^{(6)} = 0.8536, \quad x_3^{(6)} = 0.9830, \quad x_4^{(6)} = 1.0124.\end{aligned}$$

čime je već postignuta trzžena tačnost, jer se vrednosti dobijene u 4. i 5. iteraciji zaokružene

na 3 decimale poklapaju:

$$x_1 = 0.113, \quad x_2 = 0.854, \quad x_3 = 0.983, \quad x_4 = 1.012.$$

U iteracijama 5. i 6. već imamo poklapanje i na 4 decimale

$$x_1 = 0.1134, \quad x_2 = 0.8536, \quad x_3 = 0.9830, \quad x_4 = 1.0124.$$

2. Naći sa tačnošću  $10^{-5}$  rešenje jednačine

$$10 \sinh 2x + 1 = 30x$$

koje pripada intervalu  $(-0.4, 0.4)$ . Detaljno ispitati uslove za primenu date metode.

*Rešenje:* Za datu funkciju,  $f(x) = 5(e^{2x} - e^{-2x}) - 30x + 1$ , važi  $f'(x) = 10(e^{2x} + e^{-2x}) - 30$ , tako da će, ma šta odabrali za  $x_0$ , iterativni korak glasiti

$$x_{k+1} = x_k - \frac{5(e^{2x_k} - e^{-2x_k}) - 30x_k + 1}{10(e^{2x_k} + e^{-2x_k}) - 30}$$

Drugi izvod,  $f''(x) = 20(e^{2x} - e^{-2x})$ , je negativan za  $x < 0$  i pozitivan za  $x > 0$ , tako da prvo treba da vidimo da li se odgovarajuće rešenje nalazi levo ili desno od 0. Za početak,  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(-0.4) = 4.1189 > 0$  i  $f(0.4) = -2.1189 < 0$ , dakle rešenje se nalazi između 0 i 0.4. Kako je  $f'(0) = -10 < 0$ , a i  $f'(0.4) = -3.2513 < 0$ , to je na datom intervalu  $f' < 0$  i  $f'' > 0$  (SKICA OBAVEZNA), te se za nultu iteraciju uzima njegov levi kraj. Dakle,  $x_0 = 0$ . Sada se vrlo brzo dobija  $x^* = 0.10139$ .

3. Metodom proste iteracije, rešiti sa tačnošću  $10^{-4}$  jednačinu

$$\cos \frac{x}{\sqrt{3}} = \pi - 2x.$$

Detaljno ispitati uslove za primenu date metode.

*Rešenje:* Ukoliko datu jednačinu zapišemo u obliku

$$x = \frac{\pi - \cos \frac{x}{\sqrt{3}}}{2} = g(x),$$

lako zaključujemo da je

$$|g'(x)| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x}{\sqrt{3}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$$

za sve realne  $x$ . Uzmemo li za polaznu iteraciju npr.  $x_0 = 0$ , brzo dobijamo  $x_6 = 1.1829 = x_7$ .

4. Sprovesti tri iteracije Metode Njutn-Kantorovića u cilju nalaženja onog rešenja sistema

$$\begin{aligned}x^3 &= y^3 + x \\x^3 + y^3 &= 3xy\end{aligned}$$

za koje važi  $x < 0$  i  $y > 0$ .

Rešenje: Radi se o sistemu  $f_1(x_1, x_2) = 0$ ,  $f_2(x_1, x_2) = 0$ , gde je

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1 - x_2^3 \text{ i } f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2,$$

pa je

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 1 & -3x_2^2 \\ 3x_1^2 - 3x_2 & 3x_2^2 - 3x_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 1 & 3x_2^2 \\ -3x_1^2 + 3x_2 & 3x_2^2 - 3x_1 \end{bmatrix}$$

( $D = 3(3x_1^2 - 1) \cdot (x_2^2 - 3x_1) + 9(x_1^2 - x_2) \cdot x_2^2$ ), dok odgovarajući iterativni algoritam glasi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \\ &- \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} 3(x_1^{(k)})^2 - 1 & 3(x_2^{(k)})^2 \\ -3(x_1^{(k)})^2 + 3x_2^{(k)} & 3(x_2^{(k)})^2 - 3x_1^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x_1^{(k)})^3 - x_1^{(k)} - (x_2^{(k)})^3 \\ (x_1^{(k)})^3 + (x_2^{(k)})^3 - 3x_1^{(k)}x_2^{(k)} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} P_k & Q_k \\ R_k & S_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gde je  $D_k = 3(3(x_1^{(k)})^2 - 1) \cdot ((x_2^{(k)})^2 - 3x_1^{(k)}) + 9((x_1^{(k)})^2 - x_2^{(k)}) \cdot (x_2^{(k)})^2$  (nema mesta da sve stane u jednom redu).

Zapisano bez matrica, ovaj iterativni proces glasi

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{P_k f_{1k} + Q_k f_{2k}}{D_k} \\x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \frac{R_k f_{1k} + S_k f_{2k}}{D_k},\end{aligned}$$

gde su sa  $P_k, Q_k, R_k, S_k, f_{1k}, f_{2k}$  označeni odgovarajući izrazi iz matrično zapisanog iterativnog koraka.

Uzimajući npr.  $x_1^{(0)} = -1$  i  $x_2^{(0)} = 1$ , dobijamo

$$x_1^{(1)} = -1.2500, x_2^{(1)} = 0.5000; \quad x_1^{(2)} = -1.1388, x_2^{(2)} = 0.4108; \quad x_1^{(3)} = -1.0644, x_2^{(3)} = 0.3614...$$

## 2. GRUPA

1. a) Gausovom metodom eliminacije sa izborom glavnog elementa, rešiti sistem

$$0.43x_1 + 0.62x_2 + 0.28x_3 + 3.84x_4 = 4.36$$

$$3.42x_1 + 0.52x_2 + 0.57x_3 + 0.43x_4 = 4.32$$

$$0.57x_1 + 0.87x_2 + 4.32x_3 + 0.28x_4 = 2.17$$

$$0.52x_1 + 3.30x_2 + 0.87x_3 + 0.62x_4 = 4.48.$$

Rešenje priložiti na 4 značajne cifre.

b) Ispitati da li se na sistem dat pod a) može primeniti Gaus-Seidelova metoda i u slučaju potvrdnog odgovora rešiti sistem i ovom metodom sa tačnošću  $10^{-3}$ .

*Rešenje:*

a) Biraju se jednačine sa istim koeficijentima i kao u 1. grupi, množe se istim brojevima u iste svrhe i u konačnom rešenje se dobijaju iste vrednosti u odgovarajućem redosledu (promenjen je samo raspored vrsta i kolona, što ne utiče na primenu Gusovog metoda sa pivotiranjem).

b) Dati sistem prvo treba da prezapišemo tako da njegova matrica bude dijagonalno dominantna

$$3.42x_1 + 0.52x_2 + 0.57x_3 + 0.43x_4 = 4.32$$

$$0.52x_1 + 3.30x_2 + 0.87x_3 + 0.62x_4 = 4.48$$

$$0.57x_1 + 0.87x_2 + 4.32x_3 + 0.28x_4 = 2.17$$

$$0.43x_1 + 0.62x_2 + 0.28x_3 + 3.84x_4 = 4.36$$

Kako je

$$3.42 > 0.43 + 0.57 + 0.52,$$

$$3.30 > 0.87 + 0.62 + 0.52,$$

$$4.32 > 0.28 + 0.57 + 0.87,$$

$$3.84 > 0.28 + 0.43 + 0.62,$$

na dati sistem se Gaus-Seidelova metoda zaista može primeniti i glasiće

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3.42} \left( 4.32 - 0.52x_2^{(k)} - 0.57x_3^{(k)} - 0.43x_4^{(k)} \right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3.30} \left( 4.48 - 0.52x_1^{(k+1)} - 0.87x_3^{(k)} - 0.62x_4^{(k)} \right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4.32} \left( 2.17 - 0.57x_1^{(k+1)} - 0.87x_2^{(k+1)} - 0.28x_4^{(k)} \right)$$

$$x_4^{(k+1)} = \frac{1}{3.84} \left( 4.36 - 0.43x_1^{(k+1)} - 0.62x_2^{(k+1)} - 0.28x_3^{(k+1)} \right)$$

Ako se za polaznu iteraciju npr. uzme

$$x_1^{(0)} = \frac{4.32}{3.42} = 1.2632, \quad x_2^{(0)} = \frac{4.48}{3.30} = 1.3576, \quad x_3^{(0)} = \frac{2.17}{4.32} = 0.5023, \quad x_4^{(0)} = \frac{4.36}{3.84} = 1.1354,$$

dobija se na sličan način kao u 1. grupi isto rešenje kao u odgovarajućem redosledu.

$$x_1 = 0.9830, \quad x_2 = 1.0124, \quad x_3 = 0.1134, \quad x_4 = 0.8536.$$

2. Naći sa tačnošću  $10^{-5}$  rešenje jednačine

$$45x - 1 = 10 \sinh 3x$$

koje pripada intervalu  $(-0.3, 0.3)$ . Detaljno ispitati uslove za primenu date metode.

*Rešenje:* Za datu funkciju,  $f(x) = 5(e^{3x} - e^{-3x}) - 45x + 1$ , važi  $f'(x) = 15(e^{3x} + e^{-3x}) - 45$ , tako da će, ma šta odabrali za  $x_0$ , iterativni korak glasiti

$$x_{k+1} = x_k - \frac{5(e^{3x_k} - e^{-3x_k}) - 45x_k + 1}{15(e^{3x_k} + e^{-3x_k}) - 45}$$

Drugi izvod,  $f''(x) = 45(e^{3x} - e^{-3x})$ , je negativan za  $x < 0$  i pozitivan za  $x > 0$ , tako da prvo treba da vidimo da li se odgovarajuće rešenje nalazi levo ili desno od 0. Za početak,  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(-0.3) > 0$  i  $f(0.3) < 0$ , dakle rešenje se nalazi između 0 i 0.3. Kako je  $f'(0) = -15 < 0$ , a i  $f'(0.3) < 0$ , to je na datom intervalu  $f' < 0$  i  $f'' > 0$  (SKICA OBAVEZNA), te se za nultu iteraciju uzima njegov levi kraj. Dakle,  $x_0 = 0$ . Sada se vrlo brzo dobija  $x^* = 0.6759$ .

3. Metodom proste iteracije, rešiti sa tačnošću  $10^{-4}$  jednačinu

$$\cos \frac{x}{\sqrt{2}} = \pi - 3x.$$

Detaljno ispitati uslove za primenu date metode.

*Rešenje:* Ukoliko datu jednačinu zapišemo u obliku

$$x = \frac{\pi - \cos \frac{x}{\sqrt{2}}}{3} = g(x),$$

lako zaključujemo da je

$$|g'(x)| = \frac{1}{3} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right| \leq \frac{1}{3\sqrt{2}} < 1$$

za sve realne  $x$ . Uzmemo li za polaznu iteraciju npr.  $x_0 = 0$ , brzo dobijamo  $x_5 = 0.7610 = x_6$ .

4. Sprovesti tri iteracije Metode Njutn-Kantorovića u cilju nalaženja onog rešenja sistema

$$x^3 + y^3 = 3xy, \quad x^3 + y = y^3$$

za koje važi  $x > 0$  i  $y < 0$ .

Rešenje: Radi se o sistemu  $f_1(x_1, x_2) = 0$ ,  $f_2(x_1, x_2) = 0$ , gde je

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \text{ i } f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2 - x_2^3$$

pa je

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2 & 3x_2^2 - 3x_1 \\ 3x_1^2 & -3x_2^2 + 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2 & -3x_2^2 + 3x_1 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 + 1 \end{bmatrix}$$

( $D = 3(x_1^2 - x_2) \cdot (-3x_2^2 + 1) - 9(x_2^2 - x_1) \cdot x_1^2$ ), dok odgovarajući iterativni algoritam glasi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \\ &- \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} 3(x_1^{(k)})^2 - 3x_2^{(k)} & -3(x_2^{(k)})^2 + 3x_1^{(k)} \\ -3(x_1^{(k)})^2 & -3(x_2^{(k)})^2 + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x_1^{(k)})^3 + (x_2^{(k)})^3 - 3x_1^{(k)}x_2^{(k)} \\ (x_1^{(k)})^3 + x_2^{(k)} - (x_2^{(k)})^3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} P_k & Q_k \\ R_k & S_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gde je  $D_k = 3\left((x_1^{(k)})^2 - x_2^{(k)}\right) \cdot \left(-3(x_2^{(k)})^2 + 1\right) - 9\left((x_2^{(k)})^2 - x_1^{(k)}\right) \cdot (x_1^{(k)})^2$ .

Zapisano bez matrica, ovaj iterativni proces glasi

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{P_k f_{1k} + Q_k f_{2k}}{D_k} \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \frac{R_k f_{1k} + S_k f_{2k}}{D_k}, \end{aligned}$$

gde su sa  $P_k, Q_k, R_k, S_k, f_{1k}, f_{2k}$  označeni odgovarajući izrazi iz matricno zapisanog iterativnog koraka.

Uzimajući npr.  $x_1^{(0)} = 1$  i  $x_2^{(0)} = -1$ , dobijamo

$$x_1^{(1)} = 0.5000, x_2^{(1)} = -1.2500; x_1^{(2)} = 0.4108, x_2^{(2)} = -1.1388; x_1^{(3)} = 0.3614, x_2^{(3)} = -1.0644...$$