Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

08.12.2014. godine

Drugi kolokvijum iz predmeta Numeričke metode
1. GRUPA

1. a) Gausovom metodom eliminacije sa izborom glavnog elementa, rešiti sistem

$$\begin{aligned}
0.28x_1 + 3.84x_2 + 0.43x_3 + 0.62x_4 &= 4.36\\
0.57x_1 + 0.43x_2 + 3.42x_3 + 0.52x_4 &= 4.32\\
4.32x_1 + 0.28x_2 + 0.57x_3 + 0.87x_4 &= 2.17\\
0.87x_1 + 0.62x_2 + 0.52x_3 + 3.30x_4 &= 4.48.
\end{aligned}$$

Rešenje priložiti na 4 značajne cifre.

b) Ispitati da li se na sistem dat pod a) može primeniti Gaus-Seidelova metoda i u slučaju potvrdnog odgovora rešiti sistem i ovom metodom sa tačnošću 10^{-3}.

Rešenje:

a) Transformacijom datog sistema (uvek biramo promenljivu pomnoženu koeficijentom koji ima najveću apsolutnu vrednost) dobijamo

$$\begin{array}{ccccccccccl}
0.28x_1 & + & 3.84x_2 & + & 0.43x_3 & + & 0.62x_4 & = & 4.36 & \leftarrow + & \\
0.57x_1 & + & 0.43x_2 & + & 3.42x_3 & + & 0.52x_4 & = & 4.32 & & \leftarrow + \\
\boxed{4.32x_1} & + & 0.28x_2 & + & 0.57x_3 & + & 0.87x_4 & = & 2.17 & -0.0.0648 & -0.1319 \quad 0.2014 \\
0.87x_1 & + & 0.62x_2 & + & 0.52x_3 & + & 3.30x_4 & = & 4.48 & \leftarrow + &
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{cccccccl}
\boxed{3.8219x_2} & + & 0.3931x_3 & + & 0.5636x_4 & = & 4.2194 & -0.1029 \quad -0.1475 \\
0.3931x_2 & + & 3.3448x_3 & + & 0.4052x_4 & = & 4.0337 & \leftarrow + \\
0.5636x_2 & + & 0.4052x_3 & + & 3.1248x_4 & = & 4.0430 & \leftarrow +
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{cccccl}
3.3044x_3 & + & 0.3472x_4 & = & 3.5997 & -0.1051 \\
\boxed{0.3472x_3} & + & 3.0417x_4 & = & 3.4208 & \leftarrow +
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3.0052x_4 = 3.0426,$$

odakle sledi $x_4 = 1.0124$, $x_3 = 0.9832$, $x_2 = 0.8536$, $x_1 = 0.1134$.

b) Dati sistem prvo treba da prezapišemo tako da njegova matrica bude dijagonalno dominantna

$$\begin{aligned}
4.32x_1 + 0.28x_2 + 0.57x_3 + 0.87x_4 &= 2.17\\
0.28x_1 + 3.84x_2 + 0.43x_3 + 0.62x_4 &= 4.36\\
0.57x_1 + 0.43x_2 + 3.42x_3 + 0.52x_4 &= 4.32\\
0.87x_1 + 0.62x_2 + 0.52x_3 + 3.30x_4 &= 4.48.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
4.32 &> 0.28 + 0.57 + 0.87\\
3.84 &> 0.28 + 0.43 + 0.62,\\
3.42 &> 0.43 + 0.57 + 0.52,\\
3.30 &> 0.87 + 0.62 + 0.52,
\end{aligned}$$

na dati sistem se Gaus-Seidelova metoda zaista moze primeniti i glasiće

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4.32}\left(2.17 - 0.28x_2^{(k)} - 0.57x_3^{(k)} - 0.87x_4^{(k)}\right)\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3.84}\left(4.36 - 0.28x_1^{(k+1)} - 0.43x_3^{(k)} - 0.62x_4^{(k)}\right)\\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{3.42}\left(4.32 - 0.57x_1^{(k+1)} - 0.43x_2^{(k+1)} - 0.52x_4^{(k)}\right)\\
x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{3.30}\left(4.48 - 0.87x_1^{(k+1)} - 0.62x_2^{(k+1)} - 0.52x_3^{(k+1)}\right)
\end{aligned}$$

Ako se za polaznu iteraciju npr. uzme

$$x_1^{(0)} = \frac{2.17}{4.32} = 0.5023,\ x_2^{(0)} = \frac{4.36}{3.84} = 1.1354,\ x_3^{(0)} = \frac{4.32}{3.42} = 1.2632,\ x_4^{(0)} = \frac{4.48}{3.30} = 1.3576,$$

dobija se

$$\begin{aligned}
&x_1^{(1)} = -0.0114,\ x_2^{(1)} = 0.7756,\ x_3^{(1)} = 0.9611,\ x_4^{(1)} = 1.0634,\\
&x_1^{(2)} = 0.1111,\ x_2^{(2)} = 0.8480,\ x_3^{(2)} = 0.9763,\ x_4^{(2)} = 1.0151.\\
&x_1^{(3)} = 0.1141,\ x_2^{(3)} = 0.8539,\ x_3^{(3)} = 0.9824,\ x_4^{(3)} = 1.0123.\\
&x_1^{(4)} = 0.1135,\ x_2^{(4)} = 0.8537,\ x_3^{(4)} = 0.9830,\ x_4^{(3)} = 1.0124,\\
&x_1^{(5)} = 0.1134,\ x_2^{(5)} = 0.8536,\ x_3^{(5)} = 0.9830,\ x_4^{(5)} = 1.0124,\\
&x_1^{(6)} = 0.1134,\ x_2^{(6)} = 0.8536,\ x_3^{(6)} = 0.9830,\ x_4^{(6)} = 1.0124.
\end{aligned}$$

čime je već postignuta trzžena tačnost, jer se vrednosti dobijene u 4. i 5. iteraciji zaokružene na 3 decimale poklapaju:

$$x_1 = 0.113,\ x_2 = 0.854,\ x_3 = 0.983,\ x_4 = 1.012.$$

U iteracijama 5. i 6. već imamo poklapanje i na 4 decimale

$$x_1 = 0.1134,\ x_2 = 0.8536,\ x_3 = 0.9830,\ x_4 = 1.0124.$$

2. Naći sa tačnošću 10^{-5} rešenje jednačine

$$10 \sinh 2x + 1 = 30x$$

koje pripada intervalu $(-0.4, 0.4)$. Detaljno ispitati uslove za primenu date metode.

Rešenje: Za datu funkciju, $f(x) = 5(e^{2x} - e^{-2x}) - 30x + 1$, važi $f'(x) = 10(e^{2x} + e^{-2x}) - 30$, tako da će, ma šta odabrali za x_0, iterativni korak glasiti

$$x_{k+1} = x_k - \frac{5(e^{2x_k} - e^{-2x_k}) - 30x_k + 1}{10(e^{2x_k} + e^{-2x_k}) - 30}$$

Drugi izvod, $f''(x) = 20(e^{2x} - e^{-2x})$, je negativan za $x < 0$ i pozitivan za $x > 0$, tako da prvo treba da vidimo da li se odgovarajuće rešenje nalazi levo ili desno od 0. Za početak, $f(0) = 1 > 0$, $f(-0.4) = 4.1189 > 0$ i $f(0.4) = -2.1189 < 0$, dakle rešenje se nalazi izmedju 0 i 0.4. Kako je $f'(0) = -10 < 0$, a i $f'(0.4) = -3.2513 < 0$, to je na datom intervalu $f' < 0$ i $f'' > 0$ (SKICA OBAVEZNA), te se za nultu iteraciju uzima njegov levi kraj. Dakle, $x_0 = 0$. Sada se vrlo brzo dobija $x^* = 0.10139$.

3. Metodom proste iteracije, rešiti sa tačnošću 10^{-4} jednačinu

$$\cos \frac{x}{\sqrt{3}} = \pi - 2x.$$

Detaljno ispitati uslove za primenu date metode.

Rešenje: Ukoliko datu jednačinu zapišemo u obliku

$$x = \frac{\pi - \cos \frac{x}{\sqrt{3}}}{2} = g(x),$$

lako zaključujemo da je

$$|g'(x)| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{x}{\sqrt{3}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} < 1$$

za sve realne x. Uzmemo li za polaznu iteraciju npr. $x_0 = 0$, brzo dobijamo $x_6 = 1.1829 = x_7$.

4. Sprovesti tri iteracije Metode Njutn-Kantorovića u cilju nalaženja onog rešenja sistema

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + x \\ x^3 + y^3 &= 3xy \end{aligned}$$

za koje važi $x < 0$ i $y > 0$.

*R*ešenje: Radi se o sistemu $f_1(x_1, x_2) = 0,\ f_2(x_1, x_2) = 0$, gde je

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1 - x_2^3 \text{ i } f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2,$$

pa je

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 1 & -3x_2^2 \\ 3x_1^2 - 3x_2 & 3x_2^2 - 3x_1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 3x_2^2 - 3x_1 & 3x_2^2 \\ -3x_1^2 + 3x_2 & 3x_1^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$(D = 3\,(3x_1^2 - 1) \cdot (x_2^2 - 3x_1) + 9\,(x_1^2 - x_2) \cdot x_2^2)$, dok odgovarajući iterativni algoritam glasi

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} 3\left(x_2^{(k)}\right)^2 - 3x_1^{(k)} & 3\left(x_2^{(k)}\right)^2 \\ -3\left(x_1^{(k)}\right)^2 + 3x_2^{(k)} & 3\left(x_1^{(k)}\right)^2 - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(x_1^{(k)}\right)^3 - x_1{}^{(k)} - \left(x_2^{(k)}\right)^3 \\ \left(x_1^{(k)}\right)^3 + \left(x_2^{(k)}\right)^3 - 3x_1{}^{(k)}x_2{}^{(k)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} P_k & Q_k \\ R_k & S_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \end{bmatrix},$$

gde je $D_k = 3\left(3\left(x_1^{(k)}\right)^2 - 1\right) \cdot \left(\left(x_2^{(k)}\right)^2 - 3x_1^{(k)}\right) + 9\left(\left(x_1^{(k)}\right)^2 - x_2^{(k)}\right) \cdot \left(x_2^{(k)}\right)^2$ (nema mesta da sve stane u jednom redu).

Zapisano bez matrica, ovaj iterativni proces glasi

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{P_k f_{1k} + Q_k f_{2k}}{D_k} \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} - \frac{R_k f_{1k} + S_k f_{2k}}{D_k}, \end{aligned}$$

gde su sa $P_k.Q_k, R_k, S_k, f_{1k}, f_{2k}$ označeni odgovarajući izrazi iz matrično zapisanog iterativnog koraka.

Uzimajući npr. $x_1^{(0)} = -1$ i $x_2^{(0)} = 1$, dobijamo

$x_1^{(1)} = -1.2500, x_2^{(1)} = 0.5000;\ \ x_1^{(2)} = -1.0556, x_2^{(2)} = 0.3519;\ \ x_1^{(2)} = -0.9913, x_2^{(2)} = 0.3155...$

2. GRUPA

1. a) Gausovom metodom eliminacije sa izborom glavnog elementa, rešiti sistem

$$\begin{aligned} 0.43x_1 + 0.62x_2 + 0.28x_3 + 3.84x_4 &= 4.36 \\ 3.42x_1 + 0.52x_2 + 0.57x_3 + 0.43x_4 &= 4.32 \\ 0.57x_1 + 0.87x_2 + 4.32x_3 + 0.28x_4 &= 2.17 \\ 0.52x_1 + 3.30x_2 + 0.87x_3 + 0.62x_4 &= 4.48. \end{aligned}$$

Rešenje priložiti na 4 značajne cifre.

b) Ispitati da li se na sistem dat pod a) može primeniti Gaus-Seidelova metoda i u slučaju potvrdnog odgovora rešiti sistem i ovom metodom sa tačnošću 10^{-3}.

Rešenje:

a) Biraju se jednačine sa istim koeficijentima i kao u 1. grupi, množe se istim brojevima u iste svrhe i u konačnom rešenje se dobijaju iste vrednosti u odgovarajućem redosledu (promenjen je samo raspored vrsta i kolona, što ne utiče na primenu Gusovog metoda sa pivotiranjem).

b) Dati sistem prvo treba da prezapišemo tako da njegova matrica bude dijagonalno dominantna

$$\begin{aligned} 3.42x_1 + 0.52x_2 + 0.57x_3 + 0.43x_4 &= 4.32 \\ 0.52x_1 + 3.30x_2 + 0.87x_3 + 0.62x_4 &= 4.48 \\ 0.57x_1 + 0.87x_2 + 4.32x_3 + 0.28x_4 &= 2.17 \\ 0.43x_1 + 0.62x_2 + 0.28x_3 + 3.84x_4 &= 4.36 \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} 3.42 &> 0.43 + 0.57 + 0.52, \\ 3.30 &> 0.87 + 0.62 + 0.52, \\ 4.32 &> 0.28 + 0.57 + 0.87, \\ 3.84 &> 0.28 + 0.43 + 0.62, \end{aligned}$$

na dati sistem se Gaus-Seidelova metoda zaista moze primeniti i glasiće

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{3.42}\left(4.32 - 0.52x_2^{(k)} - 0.57x_3^{(k)} - 0.43x_4^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{3.30}\left(4.48 - 0.52x_1^{(k+1)} - 0.87x_3^{(k)} - 0.62x_4^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4.32}\left(2.17 - 0.57x_1^{(k+1)} - 0.87x_2^{(k+1)} - 0.28x_4^{(k)}\right) \\ x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{3.84}\left(4.36 - 0.43x_1^{(k+1)} - 0.62x_2^{(k+1)} - 0.28x_3^{(k+1)}\right) \end{aligned}$$

Ako se za polaznu iteraciju npr. uzme

$$x_1^{(0)} = \frac{4.32}{3.42} = 1.2632,\ x_2^{(0)} = \frac{4.48}{3.30} = 1.3576,\ x_3^{(0)} = \frac{2.17}{4.32} = 0.5023,\ x_4^{(0)} = \frac{4.36}{3.84} = 1.1354,$$

dobija se na sličan način kao u 1. grupi isto rešenje kao u odgovarajućem redosledu.

$$x_1 = 0.9830,\ x_2 = 1.0124,\ x_3 = 0.1134,\ x_4 = 0.8536.$$

2. Naći sa tačnošću 10^{-5} rešenje jednačine

$$45x - 1 = 10 \sinh 3x$$

koje pripada intervalu $(-0.3, 0.3)$. Detaljno ispitati uslove za primenu date metode.

Rešenje: Za datu funkciju, $f(x) = 5(e^{3x} - e^{-3x}) - 45x + 1$, važi $f'(x) = 15(e^{3x} + e^{-3x}) - 45$, tako da će, ma šta odabrali za x_0, iterativni korak glasiti

$$x_{k+1} = x_k - \frac{5(e^{3x_k} - e^{-3x_k}) - 45x_k + 1}{15(e^{3x_k} + e^{-3x_k}) - 45}$$

Drugi izvod, $f''(x) = 45(e^{3x} - e^{-3x})$, je negativan za $x < 0$ i pozitivan za $x > 0$, tako da prvo treba da vidimo da li se odgovarajuće rešenje nalazi levo ili desno od 0. Za početak, $f(0) = 1 > 0$, $f(-0.3) > 0$ i $f(0.3) < 0$, dakle rešenje se nalazi izmedju 0 i 0.3. Kako je $f'(0) = -15 < 0$, a i $f'(0.3) < 0$, to je na datom intervalu $f' < 0$ i $f'' > 0$ (SKICA OBAVEZNA), te se za nultu iteraciju uzima njegov levi kraj. Dakle, $x_0 = 0$. Sada se vrlo brzo dobija $x^* = 0.6759$.

3. Metodom proste iteracije, rešiti sa tačnošću 10^{-4} jednačinu

$$\cos \frac{x}{\sqrt{2}} = \pi - 3x.$$

Detaljno ispitati uslove za primenu date metode.

Rešenje: Ukoliko datu jednačinu zapišemo u obliku

$$x = \frac{\pi - \cos \dfrac{x}{\sqrt{2}}}{3} = g(x),$$

lako zaključujemo da je

$$|g'(x)| = \frac{1}{3} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right| \le \frac{1}{3\sqrt{2}} < 1$$

za sve realne x. Uzmemo li za polaznu iteraciju npr. $x_0 = 0$, brzo dobijamo $x_5 = 0.7610 = x_6$.

4. Sprovesti tri iteracije Metode Njutn-Kantorovića u cilju nalaženja onog rešenja sistema

$$x^3 + y^3 = 3xy, \qquad x^3 + y = y^3$$

za koje važi $x > 0$ i $y < 0$.

*R*ešenje: Radi se o sistemu $f_1(x_1, x_2) = 0,\ f_2(x_1, x_2) = 0$, gde je

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \text{ i }, f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2 - x_2^3$$

pa je

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2 & 3x_2^2 - 3x_1 \\ 3x_1^2 & -3x_2^2 + 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} -3x_2^2 + 1 & -3x_2^2 + 3x_1 \\ -3x_1^2 & 3x_1^2 - 3x_2 \end{bmatrix}$$

$(D = 3\,(x_1^2 - x_2) \cdot (-3x_2^2 + 1) - 9\,(x_2^2 - x_1) \cdot x_1^2)$, dok odgovarajući iterativni algoritam glasi

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} -$$

$$-\frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} -3\left(x_2^{(k)}\right)^2 + 1 & -3\left(x_2^{(k)}\right)^2 + 3x_1^{(k)} \\ -3\left(x_1^{(k)}\right)^2 & 3\left(x_1^{(k)}\right)^2 - 3x_2^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(x_1^{(k)}\right)^3 + \left(x_2^{(k)}\right)^3 - 3{x_1}^{(k)}{x_2}^{(k)} \\ \left(x_1^{(k)}\right)^3 + {x_2}^{(k)} - \left(x_2^{(k)}\right)^3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{D_k} \begin{bmatrix} P_k & Q_k \\ R_k & S_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \end{bmatrix},$$

gde je $D_k = 3\left(\left(x_1^{(k)}\right)^2 - x_2^{(k)}\right) \cdot \left(-3\left(x_2^{(k)}\right)^2 + 1\right) - 9\left(\left(x_2^{(k)}\right)^2 - x_1^{(k)}\right) \cdot \left(x_1^{(k)}\right)^2.$

Zapisano bez matrica, ovaj iterativni proces glasi

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{P_k f_{1k} + Q_k f_{2k}}{D_k}$$
$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{R_k f_{1k} + S_k f_{2k}}{D_k},$$

gde su sa $P_k.Q_k, R_k, S_k, f_{1k}, f_{2k}$ označeni odgovarajući izrazi iz matrično zapisanog iterativnog koraka.

Uzimajući npr. $x_1^{(0)} = 1$ i $x_2^{(0)} = -1$, dobijamo

$x_1^{(1)} = 0.5000, x_2^{(1)} = -1.2500;\ \ x_1^{(2)} = 0.3519, x_2^{(2)} = -1.0556;\ \ x_1^{(2)} = 0.3155, x_2^{(2)} = -0.9913...$

Aleksandar Pejčev