Математика 1 - први домаћи (смене 6 и 7)

11.10.2018.

1. Дати су вектори $\vec{a}=(2t,1,1-t), \vec{b}=(-1,3,0)$ и $\vec{c}=(5,-1,8)$. а) Наћи вредност реалног параметра t за коју вектор $\vec{a}$ заклапа једнаке углове са векторима $\vec{b}$ и $\vec{c}$; б) За вредност t добијену под а) наћи угао између вектора $\vec{c}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$.

   Решење: а) Како је $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\sphericalangle(\vec{a},\vec{c})$, то је $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{c})$. Из дефиниције скаларног производа је

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|},$$

   тј.

$$\frac{(2t,1,1-t)\cdot(-1,3,0)}{\sqrt{(-1)^2+3^2+0^2}}=\frac{(2t,1,1-t)\cdot(5,-1,8)}{\sqrt{5^2+(-1)^2+8^2}},$$

   односно

$$\frac{-2t+3}{\sqrt{10}}=\frac{10t-1+8-8t}{\sqrt{90}},$$

   одакле је $t=\frac{1}{4}$.

   б) За $t=\frac{1}{4}$ је $\vec{a}=(\frac{1}{2},1,\frac{3}{4})$. Затим рачунамо векторски производ

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4}\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \frac{3}{4}\\ 3 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{k}=\left(-\frac{9}{4},-\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right),$$

   па је тражени угао

$$\sphericalangle(\vec{c},\vec{a}\times\vec{b})=\arccos\frac{(5,-1,8)\cdot(-\frac{9}{4},-\frac{3}{4},\frac{5}{2})}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{\frac{190}{16}}}=\arccos\frac{\frac{38}{4}}{\frac{30\sqrt{19}}{4}}=\arccos\frac{\sqrt{19}}{15}.$$

2. Решити матричну једначину $ABX=C+2X$, ако су дате матрице

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & -5\end{bmatrix},\quad B=A^T,\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

   Решење: Да бисмо изразили непознату матрицу X, трансформишемо дату једначину у $(AB-2E)X=C$, где је E јединична матрица реда 3. Ако означимо $M=AB-2E$ и претходну једначину помножимо са M^{-1} са леве стране (када та матрица постоји), решење једначине је $X=M^{-1}C$. Сада рачунамо

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 11\\ 3 & 11 & 34\end{bmatrix}$$

   и

$$M=AB-2E=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 11\\ 3 & 11 & 34\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 11\\ 3 & 11 & 32\end{bmatrix}.$$

   Инверзну матрицу M^{-1}, под условом да је $\det M\neq 0$, налазимо по формули

$$M^{-1}=\frac{1}{\det M}\operatorname{adj}M,$$

   где је адјунгована матрица $\operatorname{adj}M$ транспонова матрица кофактора. Сада је $\det M=2$ и

$$\operatorname{adj}M=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}3 & 11\\ 11 & 32\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 11\\ 3 & 32\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 11\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 11 & 32\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & 32\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 11\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 3\\ 3 & 11\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 11\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-25 & -31 & 13\\ -31 & -41 & 17\\ 13 & 17 & -7\end{bmatrix}.$$

   Приметимо да је добијена матрица симетрична, тј. једнака својој транспонованој матрици. Дакле,

$$M^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-25 & -31 & 13\\ -31 & -41 & 17\\ 13 & 17 & -7\end{bmatrix},$$

   па је решење матричне једначине

$$X=M^{-1}C=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-25 & -31 & 13\\ -31 & -41 & 17\\ 13 & 17 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{25}{2} & -9\\ -\frac{31}{2} & -12\\ \frac{13}{2} & 5\end{bmatrix}.$$

Задатак са вежби 11.10.2018.

Дискусијом по реалном параметру a, решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x & - & 2y & + & 5z & + & au & = & 0 \\ 6x & - & ay & + & 4z & + & 3u & = & 0 \\ 9x & - & 6y & + & 3z & + & 2u & = & 0 \end{array}.$$

Решење: Означимо са A и $\bar{A}$ матрицу и проширену матрицу система, редом. Тада је $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = r$ и број r је увек мањи од проја промењљивих, односно 4. На основу Кронекер-Капелијевог става следи да је овај систем неодређен за свако реално a. Даље је

$$r = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & a \\ 6 & -a & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{V_2-2V_2, \\ V_3-3V_1}}{=} \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & a \\ 0 & 4-a & -6 & 3-2a \\ 0 & 0 & -12 & 2-3a \end{bmatrix}.$$

(1°) За $a \neq 4$ је $r = 3$. Промењљиве x, y, z су везане, а u је слободна и њој додељујемо вредност параметра, $u = t, t \in \mathbb{R}$. Враћањем уназад добијамо вредности осталих промењљивих, односно

$$(x, y, z, u) \in \left\{ \left(\frac{(3a-22)t}{36}, \frac{t}{2}, \frac{(2-3a)t}{12}, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ово решење је једноструко бесконачно (да смо две промењљиве бирали произвољно, било би двоструко бесконачно итд.)

(2°) За $a = 4$ је

$$r = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -12 & -10 \end{bmatrix} \overset{V_3-2V_2}{=} \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

па овај систем има двоструко бесконачно решење. Промењљиве x и z су везане, а $y = t$ и $u = s$, $t, s \in \mathbb{R}$, су слободне промењљиве. Решење система је у овом случају

$$(x, y, z, u) \in \left\{ \left(\frac{2t}{3} + \frac{s}{18}, t, -\frac{5s}{6}, s \right) \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Напомена: Када су сви слободни чланови једнаки нули, систем се зове хомоген. Овакав систем увек има решења, јер је $(x, y, z, u) = (0, 0, 0, 0)$ његово решење и оно се зове тривијално решење.

Рада Мутавџић