8.11.2018.

Први колоквијум из Математике 1 - смене 6 и 7

1. група

1. Решити матричну једначину $AX^{-1} = 2X^{-1} + B$, за $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Решење: Множењем дате једначине са X са десне стране добијамо $A = 2E + BX$, односно $X = B^{-1}(A - 2E)$. Даље је

$$B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \\ -10 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 3 & -\frac{7}{8} & -\frac{13}{8} \end{bmatrix}.$$

2. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} ax &+ (a+3)y + 3z = 1 \\ x &+ ay + z = 0 \\ (a-1)x &+ (a+3)y + 2z = 0 \end{aligned}$$

   дискусијом по реалном параметру a.

   Решење: Применимо Крамерово правило. Рачунамо $\Delta = 3a - a^2, \Delta_x = \Delta_y = a - 3, \Delta_z = -a^2 + 2a + 3$.

   (1°) За $a^2 \neq 3a$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, \frac{1}{a} + 1\right)$.

   (2°) За $a = 3$ систем је неодређен и његова решења су $(x, y, z) \in \left\{\left(t, -\frac{1}{3}, 1 - t\right) \,|\, t \in \mathbb{R}\right\}$.

   (3°) За $a = 0$ систем нема решња.

3. Наћи једначину праве p која пролази кроз тачку $M(4, 2, -1)$, сече праву $l\left(\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-2}\right)$ и паралелна је равни $\alpha(x + y + 2z = 4)$.

   Решење: Права p пролази кроз тачку $L(3t + 2, 2t - 1, -2t + 4)$ са праве l за за вредност параметра t коју добијамо из услова да је вектор $\overrightarrow{ML} = (3t - 2, 2t - 3, -2t + 5)$ ортогоналан на вектор нормале на раван α - $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 2)$. Дакле, $\overrightarrow{ML} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$, одакле је $t = -5$. Следи да је $L(-13, -11, 14)$, па се за вектор правца праве p може узети вектор $\overrightarrow{LM} = (17, 13, -15)$. Једначина праве p у канонском облику је $p(\frac{x+13}{17} = \frac{y+11}{13} = \frac{z-14}{-15})$.

8.11.2018.

Први колоквијум из Математике 1 - смене 6 и 7

2. група

1. Решити матричну једначину $AX^{-1} = B - 2X^{-1}$, за $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

   Решење: Множењем дате једначине са X са десне стране добијамо $A = BX - 2E$, односно $X = B^{-1}(A + 2E)$. Даље је

$$B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A + 2E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{32}{5} & -\frac{12}{5} & -\frac{7}{5} \end{bmatrix} .$$

2. Решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & (m+3)y & + & (m-1)z & = & 0 \\ 3x & + & (m+3)y & + & mz & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 0 \end{array}$$

   дискусијом по реалном параметру m.

   Решење: Исто као у групи 1 са замењеним x и z и параметром m уместо a.

3. Наћи једначину праве p која пролази кроз тачку $M(-1, 2, 4)$, сече праву $l\left(\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}\right)$ и паралелна је равни $\alpha(2x + y + z = 3)$.

   Решење: Исто као у групи 1 са замењеним координатама x и z.

Рада Мутавџић