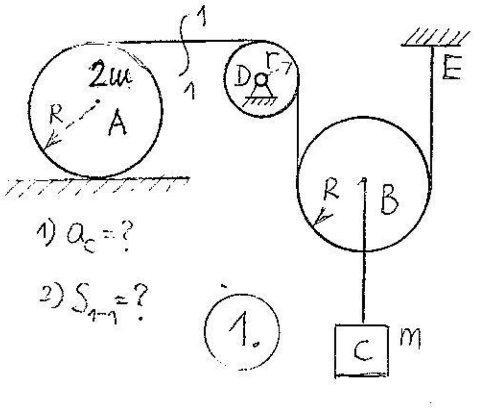
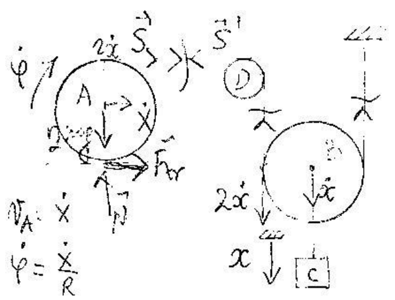


Uže koje je prebačeno preko diskova B, D spaja disk A (mase $m_A=2m$, poluprečnika R, kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj ravni) s nepomičnom tačkom plafona E. Mase diskova B, D i užadi zanemariti. Drugo uže spaja teret C, mase m, s centrom diska B. U tački D je zglobna veza. Disk B je poluprečnika R, a disk D je poluprečnika r. Odrediti: 1) ubrzanje tereta C, 2) silu u užetu između diskova A i D.



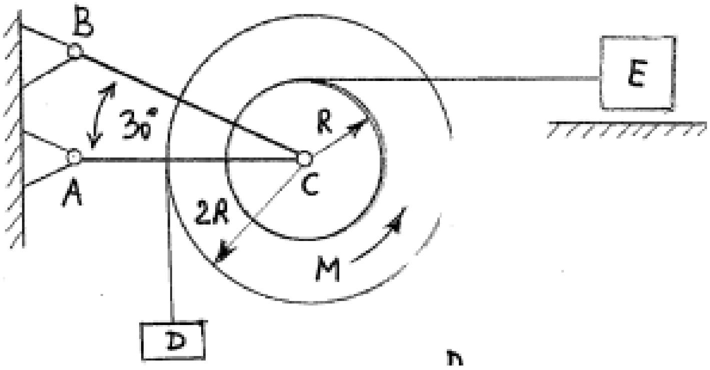
1 ZADATAK: I grupa:

$$T=\frac{1}{2}mV_C^2+\frac{1}{2}(2m)V_A^2+\frac{1}{2}J_{Az}\dot{\varphi}^2=2m\dot{x}^2$$

$$\delta A = mg\,\delta x \qquad Q_x = mg$$

$$4m\ddot{x}=mg \qquad \ddot{x}=\frac{g}{4}$$

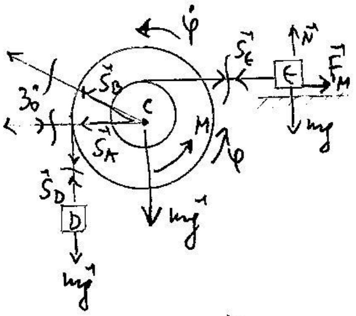
ili
$$\begin{cases} m\ddot{x}=mg-2S \\ 2m\ddot{x}=S-F_{tr} \\ \left[\frac{1}{2}(2m)R^2\right]\frac{\ddot{x}}{R}=SR-F_{tr}R \end{cases} \Rightarrow \quad S=\frac{3}{8}mg$$



① Sistem koji je u vertikalnoj ravni čine laki štapovi AC i BC ($\alpha=30^o$), koaksijalni disk C i tereti D i E. Štapovi su vezani za nepomični zid, veze u tačkama A, B i C su zglobne. Tereti D i E, svaki mase m, vezani su užadima za koaksijalni disk C, (poluprečnika R, 2R, mase m i kraka inercije $i=R\sqrt{5}$). Teret E se kreće po horizontalnoj ravni sa koeficijentom trenja klizanja $\mu={}^1/_4$ .Ako na koaksijalni disk dejstvuje spreg sila momenta M=3mgR odrediti: 1) ugaonu brzinu koaksijalnog diska u funkciji ugla obrtanja, 2) sile u štapovima i sile u užadima.

$M=3mgR \quad \mu=\frac{1}{4}$

① ZADATAK: $\left\{ \text{I gr: } i=R\sqrt{5} \qquad \text{II gr: } i=R \right\}$



① GRUPA: $T=\frac{1}{2}mV_D^2+\frac{1}{2}mV_E^2+\frac{1}{2}J_{Cz}\dot\varphi^2$

$V_D=2R\dot\varphi \quad V_E=R\dot\varphi \quad J_{Cz}=mi^2=5mR^2$ $\Rightarrow \quad T=5mR^2\dot\varphi^2$

$A=mg2R\varphi-\mu mgR\varphi+M\varphi \quad \Rightarrow \quad A=\frac{19}{4}mgR\varphi$

$T-T_0=A \quad 5mR^2\dot\varphi^2=\frac{19}{4}mgR\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot\varphi=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{5}\frac{g}{R}\varphi}$

$\left(\ddot\varphi=\frac{19}{40}\frac{g}{R}\right)$

TELO E $\Rightarrow \quad mR\ddot\varphi=S_E-F_\mu$

TELO D $\Rightarrow \quad 2mR\ddot\varphi=mg-S_D$

K. DISK $\Rightarrow \quad m\underbrace{\cancel{\vec a_C}}_{0}=\vec S_A+\vec S_B+\vec S_E'+\vec S_D'+m\vec g \quad \begin{cases} 0=S_B\frac{\sqrt{3}}{2}+S_A-S_E \\ 0=S_B\frac{1}{2}-S_D-mg \end{cases}$

$S_E=\frac{29}{40}mg$

$S_D=\frac{mg}{20}$

$S_B=\frac{21}{10}mg$

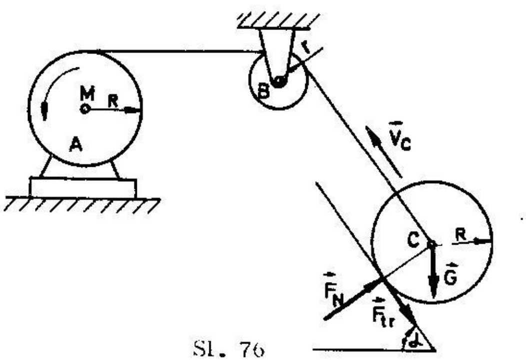
$S_A=\frac{mg}{40}(29-42\sqrt{3})$

② GRUPA: $J_{Cz}=mi^2=mR^2$

Primer 15 (sl.76). Cilindar C, težine $\vec{G}$, kotrlja se bez klizanja uz strmu ravan nagiba α pomoću dizalice. Doboš A se dovodi u obrtanje elektromotorom, čiji se obrtni moment menja po zakonu

$$M = M_o - a\omega_A ,$$

gde su M_o i a pozitivne konstante i ω_A ugaona brzina doboša.



Sl. 76

Momenti inercije za centralne ose za doboš A, kotur B i cilindar C su redosledom: J_A, J_B i J_C. U pcčetnom trenutku sistem se nalazio u miru. Masa nerastegljivog užeta se zanemaruje. Odrediti zakon kretanja centra cilindra C.

Za formiranje diferencijalne jednačine kretanja datog sistema primenićemo teoremu o promeni kinetičke energije u diferencijalnom obliku

$$\frac{dE_k}{dt} = P^s + P^u , \qquad (a)$$

jer ona ne obuhvata sile čiji je rad jednak nuli. Medju njima je sila u užetu, koje je nerastegljivo. S druge strane obrtni moment M je promenljiv i rad momenta je teže izračunati nego snagu.

Kinetička energija sistema ima tri dela:

doboša A: $E_k(A) = \frac{1}{2} \cdot J_A \omega_A^2 ,$

diska B: $E_k(B) = \frac{1}{2} \cdot J_B \omega_B^2 ,$

cilindra C: $E_k(C) = \frac{1}{2} \cdot J_C \omega_C^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} V_C^2$

Za odredjivanje uzajamne veze rukovodimo se brzinom kretanja užeta i centra C cilindra

$$V_C = R\omega_C = r\omega_B = R\omega_A .$$

Sada je ukupna kinetička energija sistema

$$E_k = E_k(A) + E_k(B) + E_k(C) = \frac{1}{2} J_A \omega_A^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} V_C^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(J_A + J_B \frac{R^2}{r^2} + J_C + \frac{G}{g} R^2\right) \omega_C^2 = \frac{1}{2} J_{red} \omega_A^2 .$$

gde je

$$J_{red} = J_A + J_B \frac{R^2}{r^2} + J_C + \frac{G}{g} R^2$$

redukovani moment inercije sistema na centar A doboša.

Snage sila težina doboša A i kotura B, kao i njihovih reakcija su jednake nuli, jer su im napadne tačke nepokretne. Takodje snage reakcija strme ravni, sila $\vec{F}_N$ i $\vec{F}_{tr}$ su jednake nuli, jer ove sile dejstvuju u trenutnom polu brzina cilindra, čije je elementarno pomeranje $d\vec{r}_P = 0$. Jedino ostaju da se izračunaju snage težine cilindra C i obrtnog momenta M. Snaga težine je

$$P_1^s = \vec{G}\cdot\vec{V}_C = GV_C\cos(180-\alpha) = -GV_C\cos\alpha = -GR\omega_A\cos\alpha,$$

a snaga obrtnog momenta

$$P_2^s = M\omega_A = (M_o - a\omega_A)\omega_A.$$

Za ukupnu snagu nalazimo

$$P^s = (M_o - GR\cos\alpha - a\omega_A)\omega_A.$$

Zamenom E_k i P^s u (a) diferencijalna jednačina kretanja sistema dobija oblik

$$J_{red}\,\omega_A\frac{d\omega_A}{dt} = (M_o - GR\cos\alpha - a\omega_A)\omega_A,$$

ili

$$J_{red}\frac{d\omega_A}{dt} = M_o - GR\cos\alpha - a\omega_A = b - a\omega_A, \qquad \text{(b)}$$

gde je $b = M_o - GR\cos\alpha$.

Integracijom jednačine kretanja (b) dolazimo do jednakosti

$$\ln(b - a\omega_A) = -\frac{a}{J_{red}}t + C_1,$$

Integracionu konstantu C_1 odredjujemo iz početnih uslova: $t = 0$, $\omega_A(0) = 0$ i dobijamo

$$C_1 = \ln b.$$

Sada je

$$\ln\left(1 - \frac{a}{b}\omega_A\right) = -\frac{a}{J_{red}}t$$

i

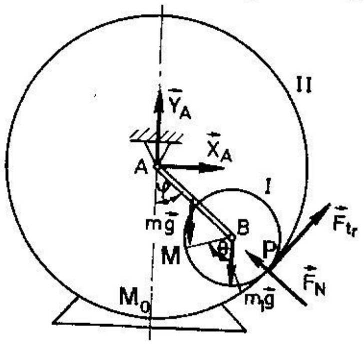
$$\omega_A = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-\frac{at}{J_{red}}}\right).$$

Na osnovu uspostavljene veze izmedju brzina, za brzinu tačke C cilindra nalazimo

$$V_C = \frac{Rb}{a}\left(1 - e^{-\frac{at}{J_{red}}}\right).$$

<u>Primer 16</u> (sl.77). Točak I, mase m_1, poluprečnika r i momenta inercije za centralnu osu J_B, kotrlja se bez klizanja u vertikalnoj ravni po nepokretnom točku II i dovodi u kretanje krivulju AB, dužine ℓ, mase m i momen-

ta inercije J_A u odnosu na osu A. U početnom trenutku centar B točka I je bio na visini h iznad svog ravnotežnog položaja, odakle je točak pušten bez početne brzine. Smatrajući krivaju homogenim štapom, odrediti brzinu kraja B krivaje u trenutku prolaza kroz ravnotežni položaj.



Sl. 77

Izvršimo prethodno analizu spoljašnjih sila, koje dejstvuju na sistem. U tački A štapa dejstvuju reakcije $\vec{X}_A$ i $\vec{Y}_A$ i u težištu štapa težina $m\vec{g}$. Na točak I dejstvuje težina $m_1\vec{g}$ i reakcije: normalna reakcija i sila trenja $\vec{F}_{tr}$, bez koje ne bi bilo kotrljanja bez klizanja. Unutrašnje reakcije se javljaju u tački B, ali je njihov rad jednak nuli, jer je sistem neizmenljiv. Takodje su radovi svih spoljašnjih reakcija jednaki nuli. Rad sila $\vec{X}_A$ i $\vec{Y}_A$ je jednak nuli, jer je tačka A nepokretna, a sila $\vec{F}_N$ i $\vec{F}_{tr}$, jer dejstvuju u trenutnom polu brzina točka I.

Zahtev zadatka je da se odredi kinematička veličina, a rad vrše samo konstantne spoljašnje sile sistema, pa je pogodno primeniti teoremu o promeni kinetičke energije u konačnom obliku

$$E_k(t_2) - E_k(t_1) = A_{1-2}, \qquad \text{(a)}$$

gde je $E_k(t_1) = 0$, jer je sistem u početnom trenutku bio u miru.

Kinetička energija sistema za vreme kretanja sastoji se iz kinetičke energije štapa AB

$$E_k(AB) = \frac{1}{2} J_A \omega_{AB}^2 ,$$

koji se obrće oko nepokretne ose, i kinetičke energije točka I

$$E_k(I) = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_I^2 ,$$

koji vrši ravansko kretanje.

Izmedju apsolutnih brzina V_B, ω_{AB} i ω_I uspostavljamo kinematičke veze. U toku kretanja, pri tekućem uglu φ, brzina tačke B je

$$V_B = AB\,\omega_{AB} = \ell\dot{\varphi}.$$

Izmedju ugaonih brzina ω_{AB} i ω_I uspostavljamo vezu na osnovu postavljenog uslova o kotrljanju bez klizanja točka I po točku II. Zato imamo jednakost lukova

$$\overset{\frown}{M_o P} = \overset{\frown}{MP} ,$$

ili

$$(\ell + r)\varphi = r(\theta + \varphi),$$

gde je r poluprečnik točka I. Kako je θ apsolutna koordinata obrtanja točka I, to je $\dot{\theta} = \omega_I$ njegova apsolutna ugaona brzina. Nju odredjujemo diferenciranjem postavljene veze i nalazimo

$$\dot{\theta} = \omega_I = \frac{\ell}{r}\dot{\varphi} = \frac{V_B}{r} .$$

Unošenjem izračunatih brzina i sabiranjem kinetičkih energija, za kinetičku energiju sistema nalazimo

$$E_k = \frac{1}{2} J_A \frac{V_B^2}{\ell^2} + \frac{1}{2} m_1 V_B^2 + \frac{1}{2} J_B \frac{V_B^2}{r^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{J_A}{\ell^2} + m_1 + \frac{J_B}{r^2}\right) V_B^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M_{red} V_B^2, \qquad \text{(b)}$$

gde je

$$M_{red.} = \frac{J_A}{\ell^2} + m_1 + \frac{J_B}{r^2}$$

redukovana masa sistema na tačku B.

Kako rad vrše samo težine $m_1\vec{g}$ i $m\vec{g}$, to pri prelazu sistema iz položaja odredjenog koordinatom $\varphi = \alpha$ u položaj $\varphi = 0$, rad ovih sila iznosi

$$A^s(m_1\vec{g}) = m_1 g (\ell - \ell\cos\alpha) ;$$

$$A^s(m\vec{g}) = mg\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\cos\alpha\right) = mg\frac{\ell}{2}(1 - \cos\alpha).$$

Zamenom izračunatih veličina u teoremu (a) nalazimo

$$\frac{1}{2} M_{red} \cdot V_B^2 = m_1 g \ell (1 - \cos\alpha) + mg\frac{\ell}{2}(1 - \cos\alpha),$$

ili

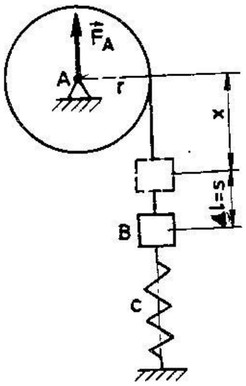
$$\frac{1}{2} M_{red} V_B^2 = \left(m_1 + \frac{m}{2}\right) gh,$$

odakle je

$$V_B = \sqrt{\frac{2m_1 + m}{M_{red}} gh} .$$

<u>Primer 17</u> (sl.78). Za tanki štap AB, dužine 2ℓ, pričvršćene su simetrično tri jednake kuglice. Štap je u vertikalnoj ravni i krajem A klizi po horizontalnoj glatkoj pravoj. Odrediti ugaonu brzinu obrtanja štapa, ako je u početnom trenutku ona jednaka ω_o i štap je sa horizontalnom osom obrazovao ugao φ_o.

Primer 18. (sl.79). Homogeni cilindar može da se obrće oko horizontalne ose A bez trenja. Osa prolazi kroz njegovo težište. Oko cilindra je namotan konac, o čijem kraju visi teret B, mase m. Teret je vezan i za jedan kraj opruge, krutosti c, čiji je drugi kraj vezan za nepokretni pod. Moment inercije cilindra za osu A je J. Zaokretanjem cilindra teret je podignut do položaja pri kome je izduženje opruge s i pušten bez početne brzine. Odrediti brzinu tereta u položaju u kome je opruga nenapregnuta, zanemarujući trenje, masu konca i opruge.



Sl. 79

Na materijalni sistem, koji se sastoji iz doboša i tereta dejstvuju spolja: težina doboša, težina tereta i sila u opruzi. Razlikujemo dva položaja sistema. Prvi, u kome svi članovi sistema miruju, a opruga je izdužena, i drugi, u kome se svi članovi kreću, a opruga je nenapregnuta. Reakciju veze $\vec{F}_A$ nismo pomenuli, jer je njena napadna tačka nepokretna i ona ne vrši rad. S obzirom da su sile koje vrše rad konzervativne, to ćemo primeniti zakon o održanju mehaničke energije

$$E_k(t_1) + E_p(t_1) = E_k(t_2) + E_p(t_2), \tag{a}$$

U početnom trenutku je sistem u miru i zato je $E_k(t_1) = 0$. U tom položaju je opruga izdužena za veličinu s i ima potencijalnu energiju. Usvojimo li horizont tačke A za nulti nivo potencijala sile teže, ukupna potencijalna energija sistema u trenutku t_1 iznosi

$$E_p(t_1) = -mgx + \frac{1}{2}\, c.s^2 .$$

U trenutku t_2 imamo samo potencijalnu energiju tereta B, jer je opruga nenapregnuta, pa je

$$E_p(t_2) = -mg(x+s).$$

Kinetička energija sistema ima dva člana

$$E_k(t_2) = E_k(A) + E_k(B),$$

pri čemu je za cilindar

$$E_k(A) = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{J}{r^2} V^2,$$

jer je $V = r\omega$, i za teret B

$$E_k(B) = \frac{1}{2} mV^2 .$$

Sada, za trenutak t_2 nalazimo

$$E_k(t_2) = \frac{1}{2}(J + mr^2)\frac{V^2}{r^2} .$$

Zamenom nadjenih veličina u zakon (a) imamo

$$-mgx + \frac{1}{2}\, c.s^2 = \frac{1}{2}(J + mr^2)\frac{V^2}{r^2} - mg(x+s),$$

odakle je

$$V = \sqrt{\frac{sr^2 \cdot (cs + 2mg)}{J + mr^2}} .$$