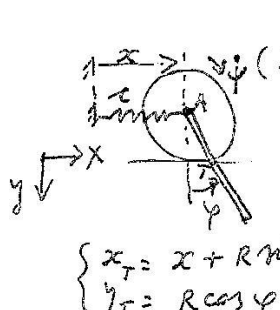


Za središte A diska mase $M=2m$ i poluprečnika r , koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni, zglobo je vezan štap AB dužine $2R$ i mase m . Disk A je u svom centru horizontalnom oprugom krutosti c vezan za vertikalni zid. Za date generalisane koordinate x, φ odrediti: diferencijalne jednačine kretanja. Kada je $x=0$ opruga je ne deformisana.

(I grupa: $M=2m$) (II grupa: $M=3m$)



$$T = \frac{M}{2} V_A^2 + \frac{1}{2} J_{A2} \dot{\psi}^2 + \frac{m}{2} V_T^2 + \frac{1}{2} J_{T2} \dot{\varphi}^2$$

$$V_A = \dot{x} \quad \dot{\psi} = \frac{\dot{x}}{r} \quad V_T^2 = \dot{x}_T^2 + \dot{y}_T^2$$

$$J_{A2} = \frac{1}{2} M r^2 \quad J_{T2} = \frac{m R^2}{3}$$

$$\begin{cases} x_T = x + R \sin \varphi \\ y_T = R \cos \varphi \end{cases}$$

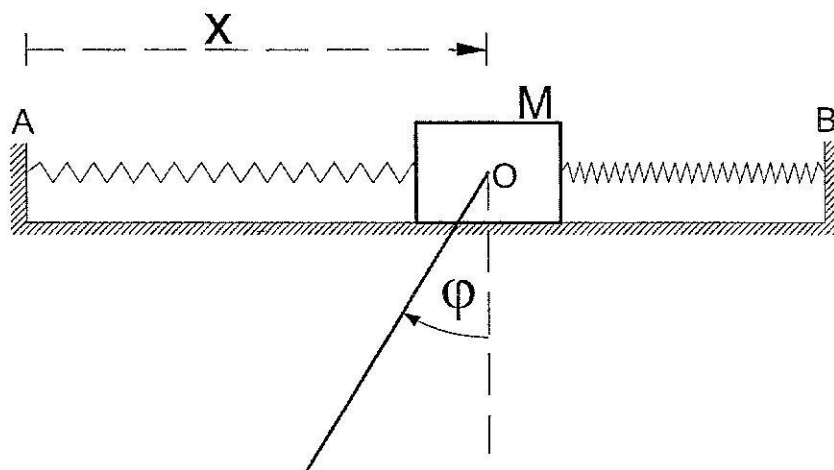
$$V_T^2 = \dot{x}^2 + 2R \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T = \frac{1}{2} (3M + 2m) \dot{x}^2 + mR \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{2}{3} mR^2 \dot{\varphi}^2$$

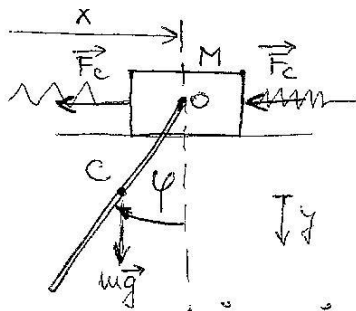
$$\delta A = -cx \delta x + mg \delta y_T \quad Q_x = -cx \quad Q_\varphi = -mgR \sin \varphi$$

$$\begin{cases} (3M + 2m) \ddot{x} + 2mR \ddot{\varphi} \cos \varphi - 2mR \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - 2cx = 0 \\ 4R \ddot{\varphi} + 3\ddot{x} \cos \varphi + 3g \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

3. Telo M , mase $2m$, može da se kreće po glatkoj horizontalnoj ravni (slika 3). Pomoću opruga istih krutosti c telo je vezano za nepokretnu podlogu u tačkama A i B, pri čemu je $\overline{AB} = 2l$. Za središte tela O zglobo je vezan štap dužine l i mase m . Za date generalisane koordinate x, φ odrediti diferencijalne jednačine kretanja. Kada je $x=l$, opruge su nedeformisane.



(3) ⊥ TP



$$M = 2m$$

$$\text{маса: } m, l$$

$$\overline{AB} = 2l$$

$x_0 = l$ ОПРЯГА
НЕ НАПРЕГНУТА

$$x_c = x - \frac{l}{2} \sin \varphi$$

$$y_c = \frac{l}{2} \cos \varphi$$

$$J_{cz} = \frac{ml^2}{12}$$

$$E_k = E_{k1} + E_{k2}$$

$$E_k = \frac{1}{2} 2m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \dot{\varphi}^2$$

$$\dot{x}_c = \dot{x} - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}_c = -\frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$v_c^2 = \left(\dot{x} - \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \right)^2 + \left(-\frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \right)^2$$

$$v_c^2 = \dot{x}^2 - l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2$$

$$E_k = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 - \frac{ml}{2} \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{ml^2}{6} \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = 3m \dot{x} - \frac{ml}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) = 3m \ddot{x} - \frac{ml}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{ml}{2} \dot{x} \cos \varphi + \frac{ml^2}{3} \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = -\frac{ml}{2} (\ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi) + \frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi}$$

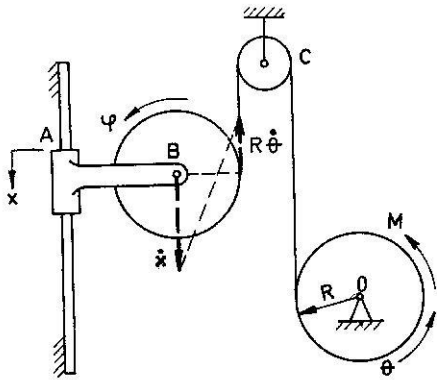
$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = \frac{ml}{2} \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad Q_x = -2c(x-l), \quad Q_\varphi = -\frac{mgl}{2} \sin \varphi$$

$$3m \ddot{x} - \frac{ml}{2} \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} + \frac{ml}{2} \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = -2c(x-l)$$

$$-\frac{\cos \varphi}{2} \ddot{x} + \frac{l}{3} \ddot{\varphi} = -\frac{g}{2} \sin \varphi$$

ЛАТРАН. Д-НЕ
II ВРСТЕ

Primer 41, (sl.159). Telo AB, mase m_1 , klizanjem kraja A bez trenja po vertikalnoj vodjici, može da se kreće u vertikalnoj ravni. Na kraju mu B može da se obrće bez trenja cilindar, poluprečnika R i mase m_2 , oko koga je omotano uže. Drugi kraj užeta je omotan oko cilindra 0, mase m_2 i poluprečnika R , koji može da se obrće bez trenja oko nepokretne ose 0. Srednji deo užeta, zanemarljive težine, je prebačen preko nepokretnog kotura C, zanemarljivih dimenzija i mase. Kretanje sistema u vertikalnoj ravni nastaje usled dejstva težina i obrtnog momenta M na cilindar 0. Odrediti obrtni moment M pod uslovom da se telo AB kreće ravnomerno.



Sl. 159

Položaj tela AB odredićemo koordinatom x , čime je određen i položaj centra masa cilindra B. Njegovo obrtno kretanje odredićemo koordinatom φ , a obrtanje cilindra 0 koordinatom θ . Između ovih koordinata uspostavljamo vezu preko cilindra B u obliku

$$R\dot{\varphi} = \dot{x} + R\dot{\theta},$$

i za generalisane koordinate usvajamo x i θ .

Za kinetičke energije pojedinih članova sistema imamo

$$E_{kAB} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2, \quad E_{kB} = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_B \dot{\varphi}^2, \quad E_{k0} = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2.$$

Iskoristimo li jednačinu veze i eliminišemo koordinatu $\dot{\varphi}$, za ukupnu kinetičku energiju sistema dobijamo

$$E_k = \frac{1}{4} (2m_1 + 3m_2) \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 R \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} + \frac{1}{4} (m_2 + m_3) R^2 \dot{\theta}^2.$$

Rad na mogućem pretpostavljenom pomeranju sistema vrše težine tela AB i cilindra B, kao i obrtni moment M , tako da je

$$\delta A = (m_1 g + m_2 g) \delta x + M \delta \theta.$$

Izdvajajući koeficijente uz nezavisne varijacije δx i $\delta \theta$, za generalisane sile dobijamo

$$Q_x = (m_1 + m_2)g, \quad Q = M.$$

Preostaje odredjivanje parcijalnih izvoda sadržanih u Lagranževim jednačinama

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial E_k}{\partial \theta} = Q_\theta. \quad (a)$$

Ovi su izvodi

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} (2m_1 + 3m_2) \ddot{x} + \frac{1}{2} m_2 R \ddot{\theta};$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m_2 R \ddot{x} + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) R^2 \ddot{\theta}$$

i njihovom zamenom, kao i generalisanih sila u izraze (a) za jednačine kretanja dobijamo

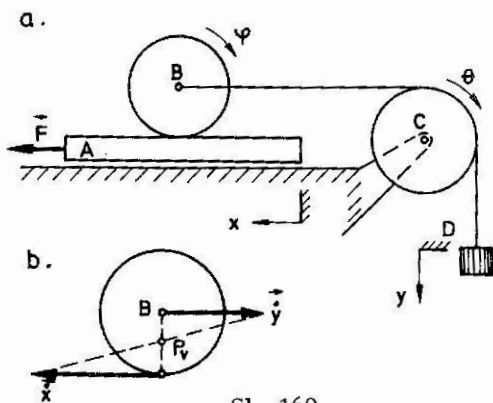
$$\frac{1}{2} (2m_1 + 3m_2) \ddot{x} + \frac{1}{2} m_2 R \ddot{\theta} = (m_1 + m_2) g;$$

$$\frac{1}{2} m_2 R \ddot{x} + \frac{1}{2} (m_3 + m_2) R^2 \ddot{\theta} = M.$$

Pri ravnomernom kretanju tela AB treba da je $\ddot{x} = 0$, odakle je

$$M = \frac{1}{2} (m_3 + m_2) R^2 \ddot{\theta} = \frac{gR}{m_2} (m_1 + m_2) (m_2 + m_3).$$

Primer 42, (sl.160). Materijalni sistem se sastoji iz tela A, koje može da klizi po horizontalnoj glatkoj



Sl. 160

podlozi pod dejstvom sile $\vec{F}$, zatim cilindra B i C i tereta D. Sva tela su jednake mase m , sila $F = 2mg$, cilindri jednaki i poluprečnika R . Pretpostavlja se kotrljanje bez klizanja cilindra B po telu A, kao i odsustvo klizanja užeta po cilindru C. Zanemarujući masu užeta i trenje u ležištu C, odrediti apsolutna ubrzanja tela A i D.

Položaji tela A i D su određeni apsolutnim koordinatama x i y , a cilindra C uglom θ . Cilindar B vrši ravno kretanje i položaj mu je

određen apsolutnim koordinatama centra B i ugla obrtanja φ . Usled nerastegljivosti užeta koordinata y određuje i položaj tačke B, a odsustvo klizanja cilindra B po telu A, prema (sl.160 b), omogućava nam uspostavljanje veze

$$R \dot{\varphi} = \dot{x} + \dot{y}. \quad (a)$$

Drugu vezu uspostavljamo između koordinata θ i y oblika

$$R \dot{\theta} = \dot{y}. \quad (b)$$

Drugih kinematičkih veza nema i od četiri koordinate x, y, φ i θ , samo su dve nezavisne. Opredelimo se za izbor koordinata x i y kao generalisanih koordinata.

Tela A i D vrše pravolinijska translatorna kretanja i njihove su kinetičke energije

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2, \quad E_{k2} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2,$$

a cilindar C obrtanje oko nepokretne ose, pa s obzirom na vezu (b) imamo

$$E_{k3} = \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} m \dot{y}^2.$$

Cilindar A vrši ravno kretanje. Pri tome, imajući u vidu vezu (a), imamo

$$E_{k4} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J_B \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{4} m (\dot{x} + \dot{y})^2 = \frac{1}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x} \dot{y} + \frac{3}{4} m \dot{y}^2.$$

Tako je ukupna kinetička energija sistema, prikazana preko generalisanih koordinata x i y , oblika

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3} + E_{k4} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x} \dot{y} + \frac{3}{2} m \dot{y}^2.$$

Za primenu Lagranževih jednačina II vrste

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial E_k}{\partial y} = Q_y, \quad (c)$$

formiramo izraz za mogući rad sila sistema. Pri tome imamo u vidu da na mogućem pomeranju sistema vrše rad samo sila $\vec{F}$ i težina tereta D, tako da je

$$\delta A = F \delta x + mg \delta y = Q_x \delta x + Q_y \delta y,$$

odakle je

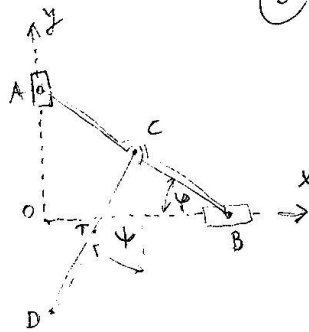
$$Q_x = F = 2mg, \quad Q_y = mg.$$

Zamenom izvoda kinetičke energije sistema i generalisanih sila u izrazu (c) dobijamo jednačine kretanja sistema u obliku

$$\begin{aligned} 3\ddot{x} + \ddot{y} &= 4g; \\ \ddot{x} + 6\ddot{y} &= 2g, \end{aligned}$$

čija su rešenja $\ddot{x} = 22g/17$ i $\ddot{y} = 2g/17$. Ugaona ubrzanja $\ddot{\varphi}$ i $\ddot{\theta}$ odredjujemo iz jednačina veza (a) i (b).

Sistem je u vertikalnoj ravni; osa Oy je vertikalna. Klizači A i B, svaki mase m mogu da se kreću po osama (vodicama) inercijalnog sistema Oxy . Štap AB je zanemarljive mase dužine $2b$, u njegovom središtu je zglobovno vezan štap CD mase m dužine $2b$. Veze su idealne, u tačkama A, B i C su zglobovne veze. Za date generalisane koordinate (apsolutni uglovi) φ i ψ odrediti: 1) kinetičku energiju, 2) generalisane sile, 3) diferencijalne jednačine kretanja.



③ ZADATAK I Osnova $q^1 = \varphi$ $q^2 = \psi$

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_{TC} \dot{\psi}^2$$

$$v_A = \dot{y}_A = 2b\dot{\varphi} \cos \varphi \quad v_C^2 = b^2 \dot{\varphi}^2 + b^2 \dot{\psi}^2 + 2b\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin(\varphi + \psi)$$

$$v_B = \dot{x}_B = -2b\dot{\varphi} \sin \varphi \quad I_{TC} = \frac{1}{12} m (2b)^2$$

$$T = \frac{5}{2} m b^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3} m b^2 \dot{\psi}^2 + m b^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin(\varphi + \psi)$$

$$\delta A = -mg 2b \cos \varphi \delta \varphi - mg (b \cos \varphi \delta \varphi + b \sin \psi \delta \psi)$$

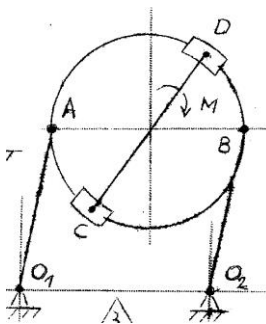
$$Q_\varphi = -3mg b \cos \varphi$$

$$Q_\psi = -mg b \sin \psi$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

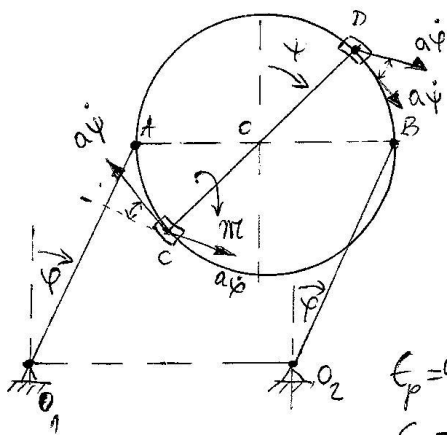
$$\text{II Osnova } q^1 = \varphi$$

$$q^2 = \theta$$



Laki štapovi O_1A i O_2B , dužine a , mogu se obrtati oko horizontalnih paralelnih osa O_1 i O_2 . U tačkama A i B zglobovno je vezan kružni prsten poluprečnika a mase M . Po glatkom prstenu mogu se kretati klizači C i D, svaki mase m (spojeni su lakim štapom CD na koji dejstvuje spreg sila momenta m). Za opisani dinamički sistem odrediti: 1) diferencijalne jednačine kretanja, 2) prve integrale kretanja.

$$\overline{CD} = 2a \quad (3) \text{ ЗАДАЧА (ОБЕ ГРУППЕ)}$$



$$\overline{O_1 A} = \overline{O_2 B} = a$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}^k + Q_{\varphi}^n$$

$$q^1 = \varphi \quad q^2 = \psi$$

$$E_k = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} m v_D^2 + \frac{1}{2} m v_E^2$$

$$v_D^2 = (a\dot{\varphi})^2 + (a\dot{\psi})^2 + 2a^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi)$$

$$v_E^2 = (a\dot{\varphi})^2 + (a\dot{\psi})^2 - 2a^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi)$$

$$E_k = \left(\frac{1}{2}M + m\right)a^2\dot{\varphi}^2 + ma^2\dot{\psi}^2$$

$$\mathcal{L}_p = m g \cos \varphi + m g (a \cos \varphi + a \cos \psi) + m g (a \cos \varphi - a \cos \psi)$$

$$\mathcal{L}_p = M g a \cos \varphi + 2 m g a \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \varphi} = - (m g a + 2 m g a) \sin \varphi$$

$$Q_{\varphi}^k = - \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \varphi}$$

$$Q_{\psi}^n = M$$

$$(1) \quad 2 m a^2 \ddot{\psi} = M$$

$$(2) \quad a^2 (M + 2m) \ddot{\varphi} = (M + 2m) g a \sin \varphi \Rightarrow a \ddot{\varphi} = g \sin \varphi$$

$$(1) \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{M}{2 m a^2} t + C_1$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\ddot{\varphi}^2}{2} = - \frac{g}{a} \cos \varphi + C_2$$