

Ispitivanje funkcija

Zadatak 1. Detaljno ispitati funkciju

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2}$$

i skicirati grafik.

Rešenje: Domen date funkcije je skup svih realnih brojeva za koje važi $x^2 - 2 \geq 0$, odnosno $|x| \geq \sqrt{2}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. Eventulne nule tražimo iz uslova $\sqrt{x^2 - 2} + x = 0$, $\sqrt{x^2 - 2} = -x$, $x^2 = x^2 - 2$, što očito nema rešenja. Vrednost $\sqrt{x^2 - 2} + x$ je pozitivna svakako kad god je $x \geq 0$ (jer ono što je pod korenom ne može biti negativno), dok u slučaju $x \leq 0$ imamo

$$\sqrt{x^2 - 2} + x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2} \geq -x \Leftrightarrow x^2 - 2 \geq x^2,$$

što očito nije tačno. Dakle, $f(x) > 0$ za $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$ i $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$.

U " $+\infty$ "važi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty + \infty = +\infty,$$

tako da u ovom slučaju nema horizontalne asimptote (zato treba da ispitamo i postojanje kose asimptote). Dalje,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 2}{x^2}} = 1 + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = 0,$$

što znači da data funkcija u " $+\infty$ "ima kosu asimptotu $y = 2x$.

U " $-\infty$ "važi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2} + x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t^2 - 2} - t) = 0$$

(uvedena je smena $t = -x$) na osnovu malopre dobijenog rezultata, što znači da u " $-\infty$ "ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ (*x-osa*). Zato egzistenciju kose asimptote nema potrebe ispitivati.

Vertikalnih asimptota je jasno da ne može biti.

Prvi izvod, $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$, je pozitivan ako i samo ako važi $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} > -1$, što očito

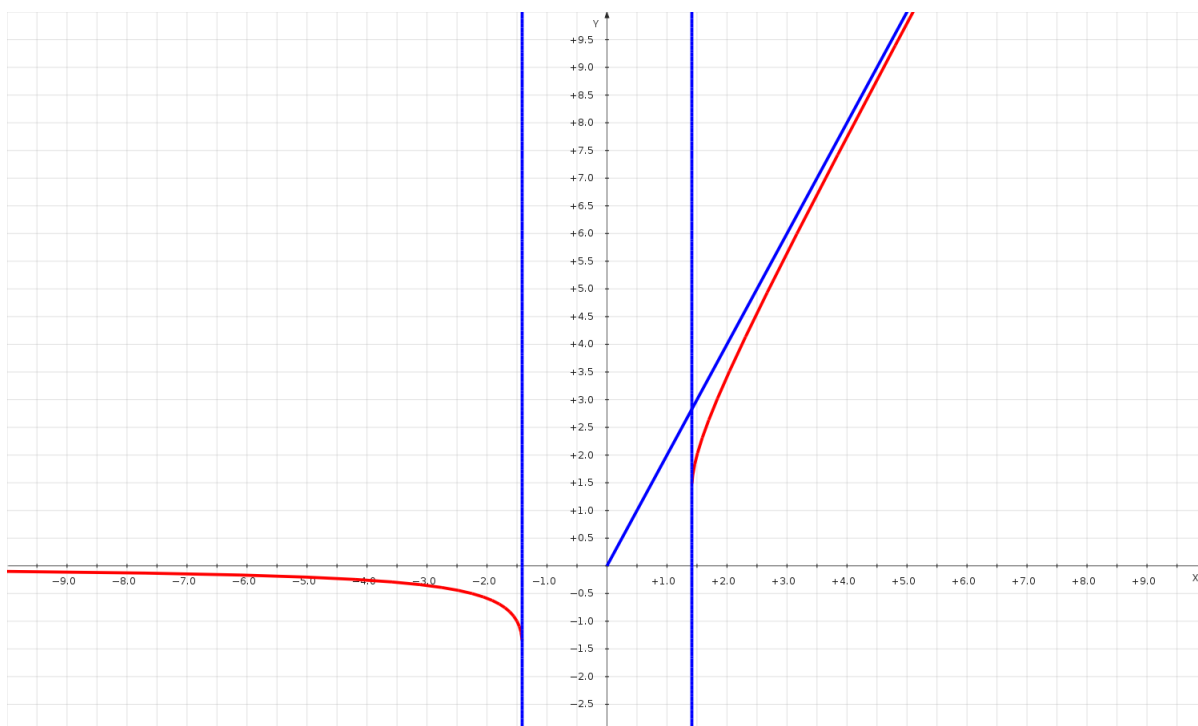
uvek važi za $x > 0$, dok za $x < 0$ ovo, odnosno $\frac{x^2}{x^2 - 2} < 1$ (prilikom kvadriranja nejednačine u

kojoj su obe strane negativne - menja se znak!), nikad ne važi u domenu $x^2 - 2 \geq 0$ date funkcije. Dakle, $f'(x) > 0$ i $f(x)$ raste za $x \in [\sqrt{2}, +\infty)$, a $f'(x) < 0$ i $f(x)$ opada za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$ ($f'(x)$ nikad nije jednako 0).

Drugi izvod,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[x(x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}} \right]' = x \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 - 2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x + (x^2 - 2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x^2}{(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2 - 2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-x^2 + x^2 - 2}{(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2}{(x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

je očito uvek strogo manji od 0, odnosno funkcija $f(x)$ je konkavna na celom svom domenu.



Zadatak 2. Detaljno ispitati funkciju

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2}{x}}$$

i skicirati grafik.

Rešenje: Vrednost date funkcije je uvek veća od ili jednaka 0 (koren je uvek nenegativan). Kako vrednost koja je pod korenom mora uvek biti nenegativna, mora da važi $\frac{x^3 + 2}{x} \geq 0$, što je ekvivalentno sa $x^3 + 2 \geq 0, x > 0$ ili $x^3 + 2 \leq 0, x < 0$, odakle dobijamo

$$D_f = \left(-\infty, -\sqrt[3]{2} \right] \cup (0, +\infty)$$

Jedini kandidat za vertikalnu asimptotu je tačka $x_0 = 0$ (i to samo s desne strane s obzirom na domen). Kako je

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{x^3 + 2}{x}} \sim \frac{2}{0+} \sim +\infty,$$

zaključujemo da u nuli data funkcija ima vertikalnu asimptotu (zapravo, y -osa). Kako je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, horizontalnih asimptota nema, a za koeficijente eventualnih kosih asimptota mora da važi

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} = \pm 1$$

Da bi u " $+\infty$ " postojala kosa asimptota, limes

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\operatorname{sgn} x \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

mora biti konačan. Izraz je oblika $\frac{\infty}{\infty}$ i može se primeniti pravilo Lopitala:

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\operatorname{sgn} x \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} - 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{2}{x^3}}} \cdot \frac{-6}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sgn} x \frac{3}{x^2 \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}}} = 0$$

Dakle, u ovom slučaju dobijamo kosu asimptotu $y = x$. Da bi u " $-\infty$ " postojala kosa asimptota, limes

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left(\operatorname{sgn} x \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} + 1}{\frac{1}{x}}$$

mora biti konačan. Izraz je opet oblika $\frac{\infty}{\infty}$ i može se primeniti pravilo Lopitala:

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\operatorname{sgn} x \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}} + 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{2}{x^3}}} \cdot \frac{-6}{x^4}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sgn} x \frac{3}{x^2 \sqrt{1 + \frac{2}{x^3}}} = 0$$

Dakle, u ovom slučaju dobijamo kosu asimptotu $y = -x$. Prvi izvod je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3 + 2}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^3 + 2}{x} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^3 + 2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(x^3 + 2)' \cdot x - (x^3 + 2) \cdot (x)'}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^3 + 2}} \cdot \frac{3x^3 - x^3 - 2}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{x^3 + 2}} \end{aligned}$$

odakle vidimo da je znak prvog izvoda date funkcije isti kao znak izraza $x^3 - 1$, odnosno $f'(x) < 0$

za $x < 1$, odnosno $f'(x) = 0$ za $x = 1$, odnosno $f''(x) > 0$ za $x > 1$, odakle zaključujemo da data funkcija u tački $x = 1$ ima lokalni minimum.

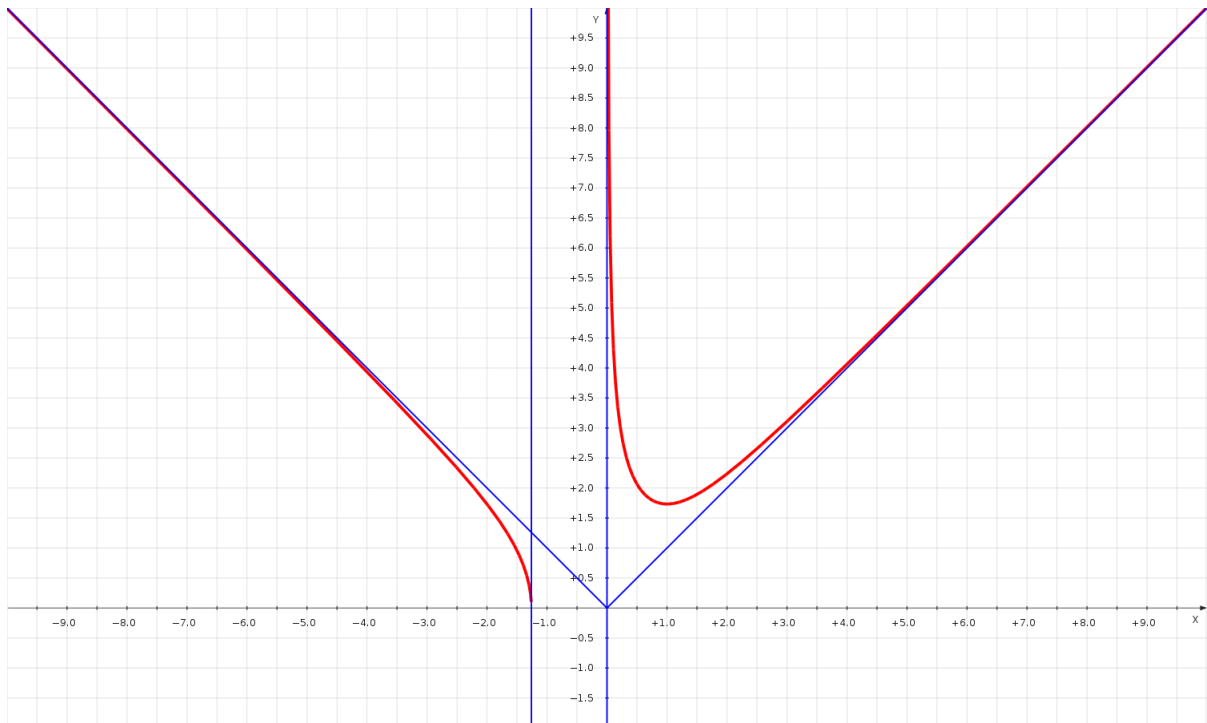
Da bismo lakše izračunali 2. izvod, najbolje je da 1. izvod zapišemo u obliku

$$f'(x) = (x^3 - 1) \sqrt{\frac{1}{x^3(x^3 + 2)}} = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x^3(x^3 + 2)}},$$

odakle je

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3x^2 \sqrt{x^3(x^3 + 2)} - (x^3 - 1) \frac{(x^3(x^3 + 2))'}{2\sqrt{x^3(x^3 + 2)}}}{x^3(x^3 + 2)} = \frac{3x^2 \cdot x^3(x^3 + 2) - (x^3 - 1)(x^3(x^3 + 2))'}{2\sqrt{x^3(x^3 + 2)} x^3(x^3 + 2)} \\ &= \frac{6x^5(x^3 + 2) - (x^3 - 1)(3x^2(x^3 + 2) + x^3 \cdot 3x^2)}{2x^3(x^3 + 2)\sqrt{x^3(x^3 + 2)}} = \frac{6x^5(x^3 + 2) - (x^3 - 1)(6x^5 + 6x^2)}{2x^3(x^3 + 2)\sqrt{x^3(x^3 + 2)}} \\ &= \frac{6x^2(x^3(x^3 + 2) - (x^3 - 1)(x^3 + 1))}{2x^3(x^3 + 2)\sqrt{x^3(x^3 + 2)}} = \frac{3(2x^3 + 1)}{x(x^3 + 2)\sqrt{x(x^3 + 2)}} \end{aligned}$$

Kako su, s obzirom na domen funkcije f , x i $x^3 + 2$ istog znaka, to je i njihov proizvod u imeniocu pozitivan, tako da je znak izraza $f''(x)$ isti kao znak izraza $2x^3 + 1$. Za $x < -\sqrt[3]{2}$ je svakako $2x^3 + 1 < 2 \cdot (-2) + 1 = -3 < 0$, dok je za $x > 0$ svakako $2x^3 + 1 > 0$, tako da je funkcija f konkavna u negativnom i konveksna u pozitivnom delu svog domena. Grafik je prikazan na slici.



prof. dr Slobodan Radojević
docent dr Aleksandar Pejčev