

## Drugi kolokvijum iz Matematike 3

1. Odrediti vrednost divergencije vektorskog polja  $\vec{F} = \vec{r}e^{\alpha r}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Rešenje.** Imamo

$$\begin{aligned}\nabla \vec{F} &= \nabla(\vec{r}e^{\alpha r}) = \nabla(\dot{\vec{r}}e^{\alpha r}) + \nabla(\vec{r}\dot{e}^{\alpha r}) = e^{\alpha r}\nabla\vec{r} + \vec{r}\nabla e^{\alpha r} = 3e^{\alpha r} + \vec{r}e^{\alpha r}\alpha\nabla r \\ &= e^{\alpha r}\left(3 + \alpha\vec{r}\frac{\vec{r}}{r}\right) = e^{\alpha r}(3 + \alpha r).\end{aligned}$$

2. Odrediti vrednost izraza

$$\oint_C \vec{r}d\vec{r},$$

gde je  $C$  kriva odredjena presekom cilindra  $x^2 + y^2 = 1$  i ravni  $-x + y + z = 0$ .

**Rešenje.** Paramterizaciju krive je najjednostavnije naći koristeći činjenicu da se kriva u  $xy$ -ravni projektuje u kružnicu. Zaključujemo da je  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ . Nalazimo da je jednačina cilindra zadovoljena. Iz jednačine ravni nalazimo  $z = x - y = \cos t - \sin t$ . Sledi

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{r}d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t + (\cos t - \sin t)(-\sin t - \cos t))dt \\ &= -\int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt = -\int_0^{2\pi} \cos 2t dt = 0.\end{aligned}$$

3. Odrediti vrednost zapremine tela koje je ograničeno ravnima  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2\pi$ ,  $z = 0$  i površi  $z = e^x \sin y$ .

**Rešenje.** Cela oblast se u  $xy$  ravni projektuje ravni u pravougaonik  $[0, 1] \times [0, 2\pi] = D_{xy}$ . Odavde nalazimo

$$V = \iint_{D_{xy}} |z| dx dy = \int_0^1 e^x dx \int_0^{2\pi} |\sin y| dy = (e-1) \left( \int_0^\pi \sin y dy - \int_\pi^{2\pi} \sin y dy \right) = 4(e-1).$$

4. Odrediti vrednost izraza

$$\iiint_V z dV,$$

gde je  $V$  oblast koja se nalazi u preseku sfere  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , unutrašnjosti konusa  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$  i poluprostora  $x \leq y$ .

**Rešenje.** Najjednostavnije je zadatak rešiti korišćenjem sfernih koordinata. Površ na kojoj je  $\theta = \text{const}$  je konus, mi za granicu oblasti imamo konus  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Površ na kojoj je  $\varphi = \text{const}$  je poluravan koja je normalna na  $xy$  ravan i kojoj je granica  $z$ , naša oblast ima za granicu dve poluravni obe opisane jednačinom  $x = y$ , konačno površ na kojoj je konstantno  $r$  je površ sfere sa centrom u koordinatnom početku, što je takodje granica oblasti. Odavde nalazimo da su granice u polarnim koordinatama  $\theta \in [0, \pi/4]$ ,  $\varphi \in [\pi/4, 5\pi/4]$ , i  $r \in [0, 1]$ . Tako da dobijamo

$$\iiint_V z dV = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{16}.$$

Moguće je zadatak rešiti i primenom cilindričnih koordinata. Prava koja je paralelna  $z$ -osi prodire oblast po površi konusa  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , a izlazi iz oblasti po površi sfere  $z =$

$\sqrt{1-x^2-y^2}$ . Projekcija oblasti na  $xy$  ravan se dobija eliminacijom promenljive  $z$  iz jednačine konusa i jednačine sfere

$$1 - x^2 - y^2 = z^2 = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}.$$

Dakle,  $D_{xy}$  je krug poluprečnika  $\sqrt{2}/2$ , koji uz dodatni uslov  $x \leq y$ , postaje polukrug sa granicom  $x = y$ . Dobijamo

$$\begin{aligned} \iiint z dV &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} dx dy (1 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}/2} r(1 - 2r^2) dr = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \frac{2}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

## Drugi kolokvijum iz Matematike 3

1. Odrediti vrednost rotora vektorskog polja  $\vec{F} = \vec{r}e^{\beta r}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

**Rešenje.** Imamo

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{r}e^{\beta r}) &= \nabla \times (\vec{r}\dot{e}^{\beta r}) + \nabla \times (\vec{r}e^{\beta r}\dot{)} = e^{\beta r}\nabla \times \vec{r} - \vec{r} \times \nabla e^{\beta r} \\ &= 0 - \beta e^{\beta r}\vec{r} \times \nabla r = -\beta e^{\beta r}\vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r} = 0. \end{aligned}$$

2. Odrediti vrednost izraza

$$\oint_C \vec{r}d\vec{r},$$

gde je  $C$  kriva odredjena presekom cilindra  $x^2 + y^2 = 1$  i ravni  $x - y + z = 0$ .

**Rešenje.** Paramterizaciju krive je najjednostavnije naći koristeći činjenicu da se kriva u  $xy$ -ravni projektuje u kružnicu. Zaključujemo da je  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ . Nalazimo da je jednačina cilindra zadovoljena. Iz jednačine ravni nalazimo  $z = y - x = \sin t - \cos t$ . Sledi

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{r}d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t + (\sin t - \cos t)(\cos t + \sin t))dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt = - \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = 0. \end{aligned}$$

3. Odrediti vrednost zapremine tela koje je ograničeno ravnima  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2\pi$ ,  $z = 0$  i površi  $z = e^x \cos y$ .

**Rešenje.** Cela oblast se projektuje u  $xy$  ravni u pravougaonik  $[0, 1] \times [0, 2\pi] = D_{xy}$ . Odavde nalazimo

$$V = \iint_{D_{xy}} |z| dx dy = \int_0^1 e^x dx \int_0^{2\pi} |\cos y| dy = (e-1) \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y dy - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos y dy \right) = 4(e-1).$$

4. Odrediti vrednost izraza

$$\iiint_V z dV,$$

gde je  $V$  oblast odredjena presekom sfere  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , unutrašnjosti konusa  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$  i poluprostorom  $x \geq y$ .

**Rešenje.** Najjednostavnije je zadatak rešiti korišćenjem sfernih koordinata. Površ na kojoj je  $\theta = \text{const}$  je konus, mi za granicu oblasti imamo konus  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Površ na kojoj je  $\varphi = \text{const}$  je poluravan koja je normalna na  $xy$  ravan i kojoj je granica  $z$  osa, naša oblast ima za granicu dve poluravni obe opisane jednačinom  $x = y$ . Konačno površ na kojoj je konstatno  $r$  je površ sfere sa centrom u koordinatnom početku, što je takodje granica oblasti. Odavde nalazimo da su granice u sfernim koordinatama zadate sa  $\theta \in [0, \pi/4]$ ,  $\varphi \in [-3\pi/4, \pi/4]$ , i  $r \in [0, 1]$ . Tako da dobijamo

$$\iiint_V z dV = \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{16}.$$

Moguće je zadatak rešiti i primenom cilindričnih koordinata. Prava koja je paralelna  $z$ -osi prodire oblast po površi konusa  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , a izlazi iz oblasti po površi sfere  $z =$

$\sqrt{1-x^2-y^2}$ . Projekcija oblasti na  $xy$  ravan se dobija eliminacijom promenljive  $z$  iz jednačine konusa i jednačine sfere

$$1 - x^2 - y^2 = z^2 = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}.$$

Dakle,  $D_{xy}$  je krug poluprečnika  $\sqrt{2}/2$ , koji uz dodatni uslov  $x \geq y$ , postaje polukrug sa granicom  $x = y$ . Dobijamo

$$\begin{aligned} \iiint z dV &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} dx dy (1 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}/2} r(1 - 2r^2) dr = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \frac{2}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right) = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$