

1. Rešenja zadataka pošaljite na email adresu:

numericke.metode.metode@gmail.com

do 23:59 časova 19.01.2015. godine. Rešenja zadataka pristigla sa zakašnjenjem neće biti uzimana u razmatranje, bez obzira na izgovor.

2. Prilikom slanja email-a u polju subject navedite sledeću nisku znakova:

KMA.NM.999/GG

gde je:

- KMA-oznaka Katedre za Matematiku
- NM-oznaka za Numeričke metode
- 999/GG-broj indeksa studenta gde se unosi vodeća nula

Na primer, ako Vam je broj indeksa 23 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

KMA.NM.023/11

Slično, ako Vam je broj indeksa 124 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

KMA.NM.124/11

3. Rešenje zadataka, program u Matlabu, slike kao ilustracije u JPEG formatu, tekst otkucan u Wordu ili skenirana rešenja pisana na papiru, pošaljite kao attachment Vašeg email-a.
4. Svaki zadatak zapakujte u posebnu zip arhivu sa imenima

zadatak01.zip, zadatak02.zip, zadatak03.zip, zadatak04.zip, zadatak05.zip

i arhive pošaljite u attachment-u.

5. Poslednji pristigli Vaš email je važeći i on će biti pregledan, dakle, mora sadržati rešenja svih zadataka koja želite da pošaljete.
6. Svako prepisivanje biće sankcionisano, drugim rečima, bolje Vam je da sami uradite jedan zadatak nego da prepisujete tri.
7. Rešenje svakog zadatka donosi 25%. Maksimalno je moguće osvojiti 125%.

### III kolokvijum iz Numeričkih metoda

1. a) Konstruisati Lagrangeov interpolacioni polinom u 30 ekvidistantnih interpolacionih čvorova na intervalu  $[1, 10]$ , za funkciju  $f(x) = (x - 1)^2(x - 5)^2(x - 10)^2 + 1$ . Prikazati grafički zavisnost broja značajnih cifara kojom interpolacioni polinom aproksimira funkciju  $f$  na intervalu  $[1, 10]$ .  
  
b) Koristeći grafik Lebesgueove funkcije, za dati raspored interpolacionih čvorova, dati teorijsku ocenu broja značajnih cifara na intervalu  $[1, 10]$ . Uporediti teorijske rezultate sa dobijenim eksperimentalnim vrednostima. Objasniti poklapanje koristeći izraz za ocenu greške interpolacije.  
  
c) Koristeći grafik Lebesgueove funkcije oceniti minimalni broj značajnih cifara prilikom interpolacije funkcije  $f(x) = (x - 1)^2(x - 5)^2(x - 10)^2 + 1$ , na intervalu  $[1, 10]$ , ako ulazni podaci imaju barem 7 značajnih cifara.
2. Pretpostavimo da imate na raspolaganju merni uređaj koji ima gornju granicu relativne greške  $10^{-m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , i da odmeravate konstantnu funkciju  $f(x) = .1$  na intervalu  $[0, 5]$  sa korakom odmeravanja  $h = .001$ .  
  
a) Za  $m = 5$ , odrediti Newtonov interpolacioni polinom najvišeg stepena  $n$  konstruisanog u interpolacionim čvorovima  $x_k = 0 + kh$ ,  $k = 0, \dots, n$ , tako da je broj značajnih cifara kojim Newtonov interpolacioni polinom aproksimira funkciju  $f$  u tački  $x_n$ , bar dva.  
  
b) Nacrtati zavisnost najvišeg stepena Newtonovog interpolacionog polinoma  $n$ , za postizanje bar dve značajne cifre u tački  $x_n$ , u funkciji broja značajnih cifara ulaznih podataka  $m$ . Objasniti zašto je zavisnost linearna.
3. a) Nacrtati zavisnost broja značajnih cifara u funkciji stepena tačnosti  $n = 2k$ ,  $k = 1, \dots, 30$ , prilikom određivanja izvoda funkcije  $f(x) = \log x$ , u tački  $x = 5$ , metodama jednostranog i dvostranog diferenciranja.  
  
b) Uporediti dobijene rezultate sa dobijenim teorijskim ocenama. Objasniti razlog velikog odstupanja. Objasniti zašto formula za dvostrano diferenciranje ima broj značajnih cifara koji, sem za mala stepene tačnosti, ne zavisi od stepena tačnosti formule  $n$ .

4. Koristeći uopštenu trapeznu formulu za izračunavanje integrala

$$\int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{\sin(1000\pi \log(2+x)/\log(3))}{2+x} \right) dx = 2,$$

nacrtati zavisnost broja značajnih cifara u funkciji logaritma broja podintervala  $N = 2^k$ ,  $k = 1, \dots, 20$ . Uporediti dobijene rezultate sa teorijskom ocenom. Pokazati da je priraštaj značajnih cifara prilikom povećanja broja podintervala za dva puta isti i na osnovu dobijenih rezultata eksperimentom i teorijski. Objasniti zašto teorijska ocena daje manji broj značajnih cifara od broja značajnih cifara dobijenih eksperimentom za isti broj podintervala.

5. a) Naći egzaktno rešenje Chauchyevog problema

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 1.$$

b) Napisati funkcije u **Matlabu** koje aproksimiraju rešenje Cauchyevog problema koristeći Eulerov metod

$$y_{n+1} = y_n + hf_k, \quad y_0 = y(0),$$

i Adams-Bashforthov metod

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n), \quad y_0 = y(0), \quad y_1 \approx 1 + h^2 + \frac{h^4}{2}, \quad y_2 \approx 1 + 4h^2 + 8h^4.$$

c) Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara aproksimacije rešenja  $y(1)$  u funkciji logaritma koraka  $h = 2^{-k}$ ,  $k = 1, \dots, 15$ . Oceniti na osnovu grafika red Adams-Bashforthovog metoda.

d) Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara rešenja Cauchyevog problema, prilikom izračunavanja Adams-Bashforthovim metodom, na intervalu  $[0, 1]$  za  $h = 2^{-10}$ . Objasniti oblik krive.

prof. dr Aleksandar Cvetković