

Geometrija masa

Masa

Materijalnost materijalnog sistema, odnosno tela, karakteriše se u Njutnovskoj mehanici samo jednim skalarnim parametrom koji se zove masa. Osobine mase su:

- 1) Masa je pozitivna veličina, $m > 0$,
- 2) Masa je apsolutna veličina, tj ista je za sve posmatrače nezavisno od njihovog kretanja, $m' = m$,
- 3) Masa je aditivna veličina, tj. $m = \sum_{i=1}^n m_i$,
- 4) za masu važi zakon konzervacije, tj. $\dot{m} = 0$.

Kada je reč o telu, masa tela koje je zamišljeno podeljeno na N ($N \rightarrow \infty$) delića je

$$m = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \Delta m_i = \int_V dm.$$

Gustina mase

Ako je oblast prostora konačne zapremine ΔV ispunjena masom Δm , tada je srednja gustina mase određena sa $\rho_{sr} = \Delta m / \Delta V$. Gustina mase u datoj tački je

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} = \rho(x, y, z)$$

Ako je $\rho = \text{const.}$, kaže se da je telo homogeno. Masa tela zapremine V određena je sada kao $m = \int_V \rho dV$. Ako je masa tela površinski raspoređena, tada je $m = \int_A \rho_1 dA$,

dok u slučaju linijskog rasporeda mase je $m = \int_L \rho_2 dL$.

Statički moment masa

Statički moment masa ili linearni polarni moment masa je $\vec{s} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$, a u slučaju neprekidno raspoređenih masa je $\vec{s} = \int_V \vec{r} dm$. Linearni polarni momenti masa u odnosu

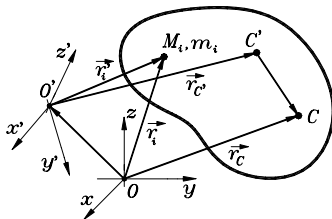
na koordinatne ravni Oyz , Oxz i Oxy , respektivno, su

$$s_x = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad s_y = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad s_z = \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad s_x = \int_V x dm, \quad s_y = \int_V y dm, \quad s_z = \int_V z dm.$$

Centar masa

Centar masa ili centar inercije materijalnog sistema je tačka čiji vektor položaja je kolinearan statičkom polarnom momentu masa sa koeficijentom proporcionalnosti $1/m$, tj.

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \vec{s} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i, \quad \vec{r}_C = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} dm.$$



Osobine centra masa

- 1) Položaj centra masa ne zavisi od izbora koordinatnog sistema već samo od rasporeda masa.

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i, \quad \vec{r}_{C'} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' m_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{OO'} + \vec{r}_i', \quad \vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (\vec{OO'} + \vec{r}_i') m_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{OO'} m_i + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' m_i = \vec{OO'} + \vec{r}_{C'}.$$

Kako je $\vec{r}_C = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}_{C'} + \overrightarrow{C'C}$, sledi da je $\overrightarrow{C'C} = 0$.

2) Linearni polarni moment masa u odnosu na centar masa jednak je nuli.

Položaj centra masa, u odnosu na centar masa je $\vec{\rho}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_i m_i = \frac{1}{m} \vec{s}'$. Kako je $\vec{\rho}_C = 0$, sledi da je $\vec{s}' = m \vec{\rho}_C = 0$.

Momenti inercije

- Polarni moment inercije ili kvadratni polarni moment masa, definiše se kao

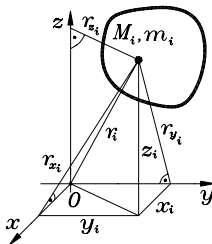
$$J_O = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad J_O = \int_V r^2 dm$$

- Aksijalni moment inercije ili moment inercije materijalnog sistema u odnosu na osu Ol , definiše se kao

$$J_l = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{l} \times \vec{r}_i)^2 = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2, \quad J_l = \int_V d^2 dm$$

- Kvadratni planarni moment masa ili moment inercije materijalnog sistema u odnosu na ravan Π , definisan je sa

$$J_\Pi = \sum_{i=1}^n m_i p_i^2, \quad J_\Pi = \int_V p^2 dm$$



Ako se u tački (polu) O postavi Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$, prethodni momenti inercije postaju

$$J_O = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \quad J_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dm,$$

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i r_{xi}^2 = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_y = \sum_{i=1}^n m_i r_{yi}^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2),$$

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i r_{zi}^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad J_x = \int_V (y^2 + z^2) dm, \quad J_y = \int_V (x^2 + z^2) dm, \quad J_z = \int_V (x^2 + y^2) dm$$

Sabiranjem izraza za aksijalne momente inercije i upoređivanjem sa izrazima za polarne momente inercije, dobija se

$$J_x + J_y + J_z = 2J_O, \quad J_x + J_y > J_z, \quad J_y + J_z > J_x, \quad J_x + J_z > J_y.$$

Momenti inercije u odnosu na koordinatne ravni su

$$J_{Oxy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2, \quad J_{Oyz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \quad J_{Oxz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2, \\ J_{Oxy} = \int_V z^2 dm, \quad J_{Oyz} = \int_V x^2 dm, \quad J_{Oxz} = \int_V y^2 dm.$$

Važi sledeće tvrđenje: $J_O = J_{Oxy} + J_{Oyz} + J_{Oxz}$. Momenti inercije za pol u centru masa, odnosno, za osu ili ravan koje prolaze kroz centar masa nazivaju se sopstveni momenti inercije. Svi prethodno definisani momenti inercije pozitivne su veličine i mogu se izraziti u obliku $J = m i^2$, gde je i - poluprečnik inercije u odnosu na tačku, osu ili ravan. Dimenzija momenta inercije je $[J] = ML^2$.

Proizvodi inercije

Pod proizvodom inercije podrazumevaju se momenti inercije u odnosu na dve ose.

Proizvod inercije za ose Ou i Ov određen je sa $\Pi_{uv} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{u} \times \vec{r}_i)(\vec{v} \times \vec{r}_i)$. Kada su ose

Ou i Ov međusobno upravne, proizvod inercije zove se devijacioni moment inercije. Ako su to ose Dekartovog koordinatnog sistema $Oxyz$, devijacioni momenti inercije su:

$$\Pi_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{i} \times \vec{r}_i)(\vec{j} \times \vec{r}_i) = -\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i, \Pi_{yz} = -\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \Pi_{zx} = -\sum_{i=1}^n m_i z_i x_i.$$

Devijacioni momenti inercije, sa promenjenim znakom, nazivaju se centrifugalni momenti inercije

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i, J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, J_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i, \\ J_{xy} = \int_V xy dm, J_{yz} = \int_V yz dm, J_{zx} = \int_V zx dm.$$

Centrifugalni momenti inercije zavise od izbora koordinatnog sistema, mogu biti i pozitivni i negativni i jednaki nuli, a važi $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{yz} = J_{zy}$, $J_{zx} = J_{xz}$. Ako su, npr.

$J_{xz} = 0$ i $J_{yz} = 0$, tada je osa Oz glavna osa inercije u tački O . U slučaju da se centar masa C nalazi na glavnoj osi inercije, tada je ta osa glavna centralna osa inercije.

Upoređivanjem aksijalnih i centrifugalnih momenata inercije dobija se

$$J_x = \int_V (y^2 + z^2) dm = \int_V (y - z)^2 dm + \int_V 2yz dm,$$

i kako je $\int_V (y - z)^2 dm \geq 0$, sledi da je $J_x - \int_V 2yz dm \geq 0$, odnosno $J_x \geq 2J_{yz}$. Na isti

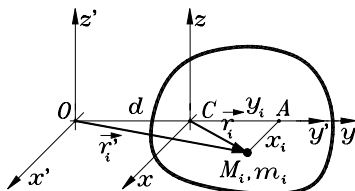
način se pokazuje da važi: $J_y \geq 2J_{zx}$ i $J_z \geq 2J_{xy}$. Matrica oblika

$$\begin{Bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{Bmatrix}$$

naziva se tenzor inercije u datoj tački. Od 9 momenata inercije, vidi se da je samo 6 međusobno nezavisno.

Ako materijalni sistem ima ravan materijalne simetrije tada je osa, koja je upravna na ravan simetrije, glavna osa inercije. U slučaju kada materijalni sistem ima osu simetrije (osa dinamičke simetrije), tada ta osa predstavlja glavnu centralnu osu inercije.

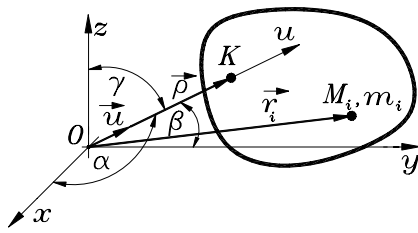
Hajgens – Štajnerova teorema



$$J_{O'z'} = \sum_{i=1}^n m_i r_i'^2, J_{Cz} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \\ r_i'^2 = (d + y_i)^2 + x_i^2 = d^2 + 2dy_i + r_i^2 \\ J_{O'z'} = \sum_{i=1}^n m_i d^2 + 2d \sum_{i=1}^n m_i y_i + \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Kako je $\sum_{i=1}^n m_i y_i = my_C = 0$, sledi da je $J_{O'z'} = J_{Cz} + md^2$, što izražava Hajgens-

Štajnerovu teoremu: moment inercije materijalnog sistema (tela) za neku osu jednak je zbiru sopstvenog momenta inercije za paralelnu osu i položajnog momenta inercije.

Moment inercije u odnosu na proizvoljnu osu kroz datu tačku

Pretpostavimo da su poznati uglovi α , β i γ koji određuju položaj ose Ou , u odnosu na koordinatni sistem $Oxyz$, kao i da su poznati momenti inercije J_x , J_y , J_z , J_{xy} , J_{yz} i J_{xz} .

$$J_u = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{u} \times \vec{r}_i)^2 = \sum_{i=1}^n m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix}^2$$

$$J_u = \sum_{i=1}^n m_i \left[(z_i \cos \beta - y_i \cos \gamma)^2 + (x_i \cos \gamma - z_i \cos \alpha)^2 + (y_i \cos \alpha - x_i \cos \beta)^2 \right],$$

$$J_u = \sum_{i=1}^n m_i \left[(z_i \cos \beta - y_i \cos \gamma)^2 + (x_i \cos \gamma - z_i \cos \alpha)^2 + (y_i \cos \alpha - x_i \cos \beta)^2 \right],$$

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{xz} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Položaj ose Ou može biti određen i poznavanjem tačke kroz koju prolazi osa. Neka je to tačka K čiji položaj je određen sa $\vec{\rho} = \overrightarrow{OK} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, tako da je

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\rho}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{\rho},$$

pa je

$$J_u \rho^2 = J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx.$$

Elipsoid inercije

Izaberimo tačku K , na osi Ou , tako da je $\overrightarrow{OK} = \rho = \frac{1}{\sqrt{J_u}}$.

Tada je

$$1 = J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx,$$

odnosno

$$f(x, y, z) = J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx - 1 = 0$$

Ako su ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$, glavne ose inercije u tački O , tada je elipsoid inercije dat sa

$$J_\xi \xi^2 + J_\eta \eta^2 + J_\zeta \zeta^2 = 1.$$

Ako se tačka O poklapa sa centrom masa, elipsoid inercije se tada naziva centralni elipsoid inercije, a njegove ose simetrije nazivaju se glavne centralne ose inercije.

Elipsoid inercije može biti prikazan i u kanonskom obliku

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

gde su poluose elipsoida inercije date sa

$$a = \frac{1}{\sqrt{J_\xi}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_\eta}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_\zeta}},$$

odakle se vidi da većim poluosama odgovaraju manji glavni momenti inercije, i obrnuto.

