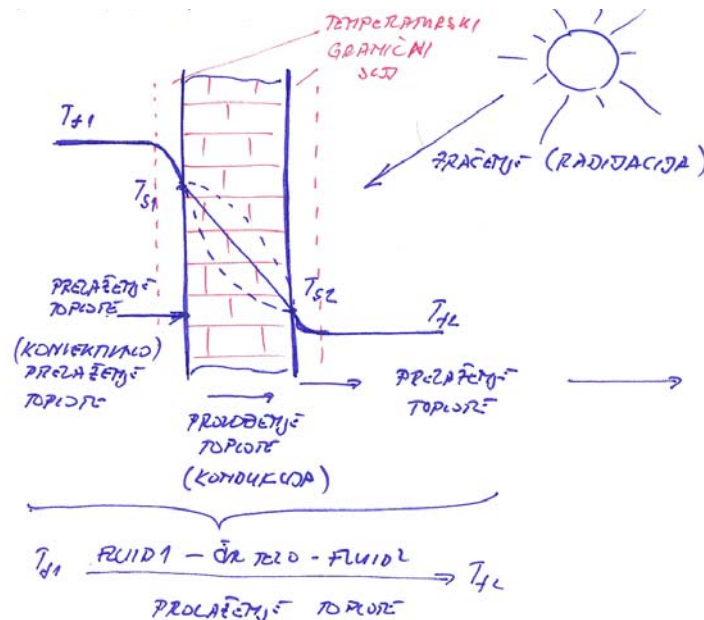


## 15. Prenosjenje toplote

- poseban deo termodinamike (da li je termodinamika?)
- ne analizira uticaj mehaničkih radova, nego samo toplote i toplotne protoke
- neuniformnost temperaturskih polja

### Načini prenošenja toplote



- prolaženje toplote (kondukcija)
- prelaženje toplote (konvekcija)
- zračenje toplote (radijacija)

### Vrste toplotnih protoka

U termodinamici:

- Količina toplote  $Q$  [J];
- Toplotni protok (fluks)  $\Phi$  [W];
- Specifični količina toplote  $q = \frac{Q}{m}$  [J/kg];
- Specifični toplotni protok  $\varphi = \frac{\Phi}{m}$  [W/kg],

U prostiranju toplote  $\varphi$  ima drugo značenje!!

Uvodi se:

- Površinski toplotni protok (toplotni protok sveden na jedinicu površine)

$$\varphi = \frac{\Phi}{A} \left[ \text{W/m}^2 \right] \quad \text{- važi za uniformnu raspodelu toplotnih protoka po nekoj površi, a}$$

$$\varphi = \frac{\delta^2 Q}{dt dA} \left[ \text{W/m}^2 \right] \quad \text{- za neuniformnu raspodelu toplotnih protoka}$$

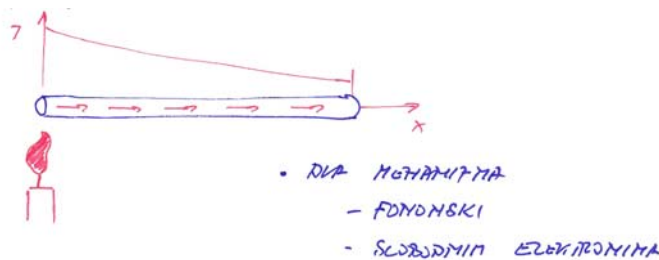
- Podužni (linijski) toplotni protok (toplotni protok sveden na jedinicu dužine) – (cevi, kanali, žice, i drugi linijski objekti)

$$\varphi_l = \frac{\Phi}{l} \quad [\text{W/m}] \quad - \text{ za uniformnu raspodelu toplotnih protoka}$$

$$\varphi_l = \frac{\delta^2 Q}{dt dl} \quad [\text{W/m}] \quad - \text{ za neuniformnu raspodelu toplotnih protoka}$$

## 15.1 Provođenje toplote (kondukcija)

- Prvenstveno se odnosi na čvrsta tela

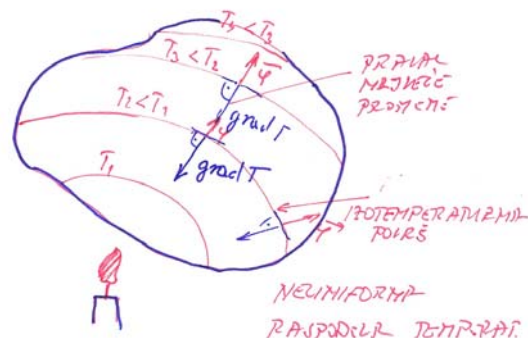


- U čvrstim telima postoje dva mehanizma provođenja toplote: fononski i slobodnim elektronima
  - Fononski – (kao zvuk) – atomi osciluju oko svojih ravnotežnih položaja u kristalnoj rešetki – dopunskom energijom pobuđeni na intenzivnije kretanje, atomi iz jedne rešetke pobuđuju na intenzivnije oscilovanje atome iz druge rešetke i tako redom – pri tim oscilacijama rešetke emituju energiju u “porcijama” (kvantovano) – fononi
  - Slobodnim elektronima – isti mehanizam kojim električna struja “protiče” kroz provodnik – (elektronski oblak- idealan gas)
- Kod gasova i tečnosti
  - Sudarima molekula – dakle na molekularnom nivou – mali prostor – ako postoji i makroskopsko kretanje (molarno) → konvektivno “prenošenje” toplote”
- Toplotna provodnost – termofizička osobenost materijala
  - $\lambda$  [W/m K] - tabele
  - $\lambda$  - veliko- dobri toplotni provodnici (npr. metali)
  - $\lambda$  - malo – toplotni izolatori (npr. stiropor, azbest,...)

### Furijeva hipoteza (Fourie)

Vektor površinskog toplotnog protoka

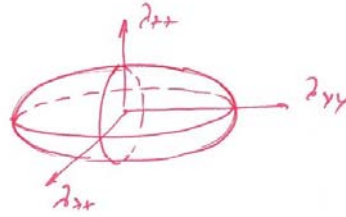
$$\vec{\phi} = -\lambda \text{ grad} T$$



- Opšte:

$\lambda$  - tenzor drugog reda

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}$$



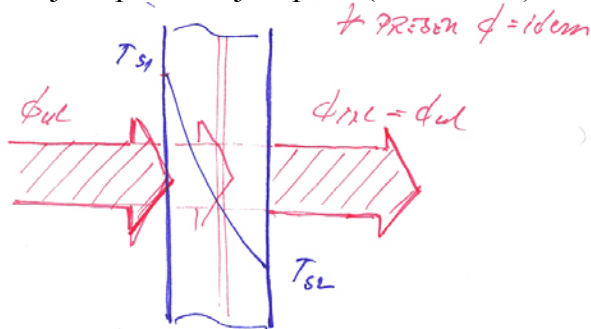
- U ovom kursu radi se samo  $\lambda$  - skalar, i to  $\lambda = f(T)$  ili  $\lambda = \text{idem} = \text{const}$

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \quad - \text{dekartov koordinatni sistem}$$

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \quad - \text{polarno-cilindrični koordinatni sistem}$$

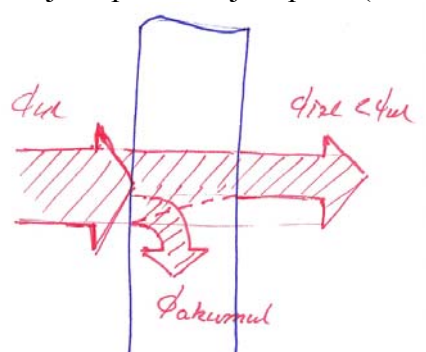
### 15.1.1 Ustaljeno provođenje toplote kroz tela pravilnih geometrijskih oblika (1-D problemi)

Ustaljeno provođenje toplote (stacionarno)



profil temperaturnog polja se ne menja tokom vremena

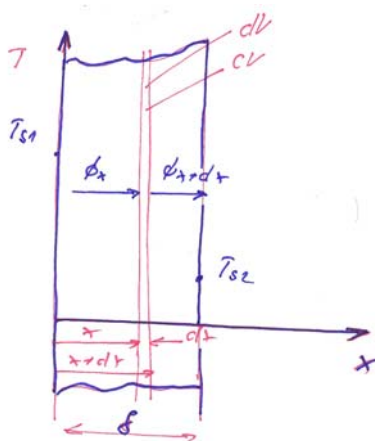
Neustaljeno provođenje toplote (nestacionarno)



usled stalnog "priliva" energije temperatura zida stalno raste - tokom vremena se menja profil temperaturnog polja!

#### Ravan beskonačan zid

- Prema Furijeovoj hipotezi uz uslove



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Iz energetskog bilansa

$$\frac{d\Phi_x}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_x = \text{idem} = \Phi$$

a prema Furijeovoj hipotezi

$$-A \lambda \frac{dT}{dx} = \Phi^*$$

integraljenjem\*

$$-A \int_{T_{s1}}^{T_{s2}} \lambda(T) dT = \int_0^\delta \Phi dx$$

$$\Phi = A \frac{\lambda}{\delta} (T_{s1} - T_{s2}),$$

$$\Phi = - \frac{A}{\delta} \int_{T_{s1}}^{T_{s2}} \lambda(T) dT,$$

- Za  $\lambda = \text{const} \Rightarrow$

$$\Phi = \frac{\lambda}{\delta} (T_{s1} - T_{s2})$$

- Toplotni protok

$$\Phi = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\frac{\delta}{\lambda A}} = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{R_{\lambda}}$$

gde je  $R_{\lambda} [\text{K/W}]$  - toplotni otpor provođenju toplote (analogija sa električnim otporom)

- Neodređenom integracijom izraza\*

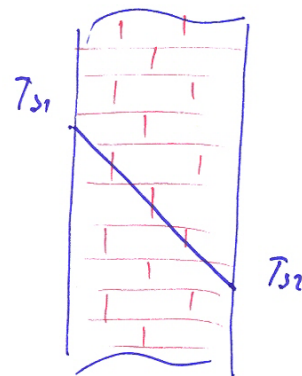
$$\Phi \int dx = - \int A \lambda dT$$

za  $\lambda = \text{const}$ ,  $T_s > T_f$ , i granični uslov:

$$x = 0 \quad T = T_{s1}$$

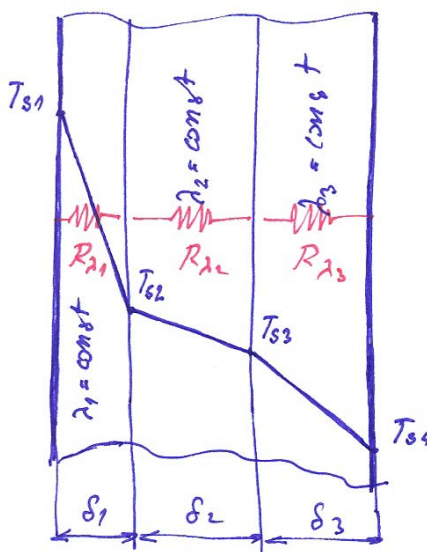
$$T = - \frac{\Phi}{A \lambda} x + T_{s1}$$

odnosno linearna promena temperature  $T$  sa koordinatom  $x$



### Višeslojan beskonačan ravan zid

- Redno vezivanje otpora



$$R_{\lambda, \text{uk}} = \sum_{i=1}^n R_i$$

$$R_{\lambda 1} = \frac{\delta_1}{A \lambda_1}; \quad R_{\lambda 2} = \frac{\delta_2}{A \lambda_2}; \quad R_{\lambda 3} = \frac{\delta_3}{A \lambda_3}$$

- Toplotni protok

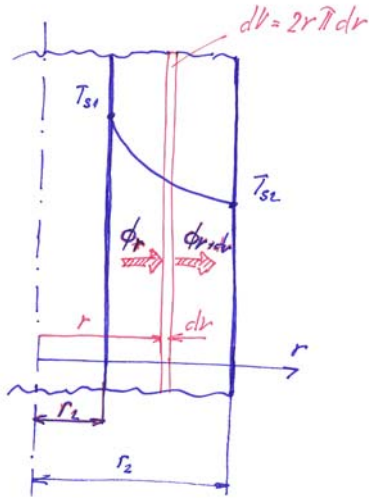
$$\Phi = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + R_{\lambda 3}}$$

- Opšte

$$\Phi = \frac{T_{s1} - T_{s, n+1}}{\sum_{i=1}^n R_{\lambda i}}$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{A} = \frac{T_{s1} - T_{s, n+1}}{A \sum_{i=1}^n R_{\lambda i}}$$

## Beskonačan cilindričan zid



- Jednodimenzionalni problem

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} \rightarrow \frac{dT}{dr}$$

- Iz bilansa energije (ustaljen proces)

$$\Phi_r = \text{idem} = \Phi$$

- Po Fourieovoj hipotezi

$$\Phi = -\lambda A_r \frac{dT}{dr} = -\lambda 2r\pi \cdot l \frac{dT}{dr}$$

$$\Phi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2\pi l \int_{T_{s1}}^{T_{s2}} \lambda(T) dT$$

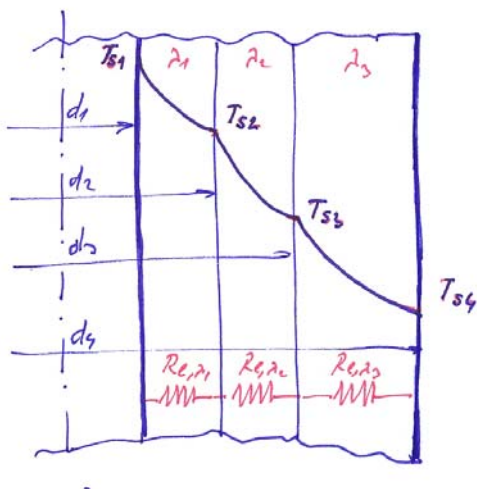
za  $\lambda = \text{const}$

$$\Phi = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\frac{1}{2\pi\lambda l} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{R_{l,\lambda}}$$

$R_{l,\lambda}$  [K/W] - toplotni otpor provođenjem toplote kroz cilindričan zid

$$\varphi_l = \frac{\Phi}{l} = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}$$

## Provođenje toplote kroz višeslojan, beskonačan cilindričan zid



- Toplotni protok

$$\Phi = \frac{T_{s1} - T_{s4}}{\sum_{i=1}^n R_{e,\lambda}}$$

$$\varphi_l = \frac{T_{s1} - T_{s4}}{l \sum_{i=1}^n R_{e,\lambda i}}$$

- Opšte

$$\Phi = \frac{T_{s1} - T_{s,n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i l} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} = \frac{T_{s1} - T_{s,n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i l} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

$$\varphi_l = \frac{T_{s1} - T_{s,n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} = \frac{T_{s1} - T_{s,n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}$$