# Математика 2

*Душан Ђукић*

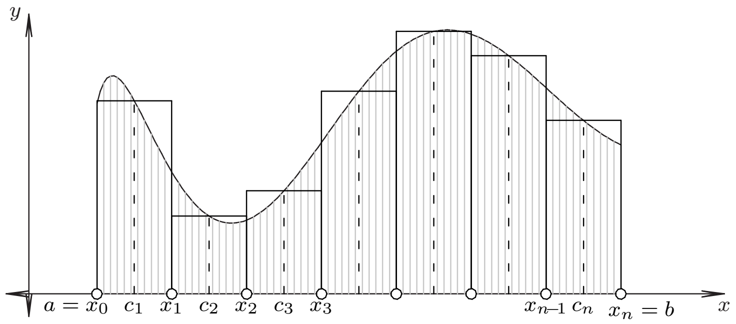
## 2-3. Одређени и несвојствени интеграли

Нека је дата функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Претпоставимо да желимо да израчунамо површину $S$ испод графика функције.

Одаберимо подеоне тачке $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ на том сегменту. Низ $\Pi = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ се назива *поделом* сегмента $[a, b]$, а *дијаметар* ове поделе је

$$d(\Pi) = \max_i \Delta x_i, \quad \text{где је} \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Површину $S$ можемо да апроксимирамо низом од $n$ правоугаоника са основицама $[x_{i-1}, x_i]$ и висинама једнаким $f(c_i)$, где су $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ за $i = 1, \ldots, n$ одабране *истакнуте тачке* поделе.




Овако добијамо процену површине $S$ збиром површина правоугаоника:

$$S \approx S(f, \Pi, c) = \sum_{i=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k.$$

Сума $S(f, \Pi, c)$ назива се *интегралном сумом* функције $f$ и она зависи од поделе $\Pi$ и избора скупа тачака $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Када подела $\Pi$ тежи "најситнијој могућој" (са бесконачно много бесконачно блиских подеоних тачака), тј. када $d(\Pi)$ тежи нули, очекујемо да интегрална сума $S(f, \Pi, c)$ тежи површини $S$.

Формално, с обзиром на то да интегрална сума $S(f, \Pi, c)$ не зависи само од дијаметра $d(\Pi)$, њен лимес $I$ када $d(\Pi) \to 0$ би био број такав да:

- За свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да, за сваку поделу $\Pi$ са дијаметром $d(\Pi) < \delta$, важи
$$|S(f, \Pi, c) - I| < \varepsilon.$$

Овај лимес у општем случају не мора да постоји. Онда када он постоји, кажемо да је функција $f$ *интеграбилна* (по Риману[1]) на сегменту $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = I$$

је њен *одређени интеграл*.

*Пример 1.* Посматрајмо функцију

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } x \text{ рационално,} \\ 1, & \text{ако је } x \text{ ирационално.} \end{cases}$$

Ова функција није интеграбилна на сегменту $[0, 1]$. Наиме, ма колико ситна била подела, истакнуте тачке $c_i$ можемо одабрати тако да истакнута сума буде било 0, било 1, те ова сума нема лимес. Заиста:

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), немачки математичар

– ако за $c_i$ бирамо искључиво рационалне бројеве, интегрална сума ће бити 0;

– ако за $c_i$ бирамо искључиво ирационалне бројеве, интегрална сума ће бити 1.

Напоменимо да је, при једној општијој дефиницији интеграла познатој као интеграл по Лебегу, и ова функција интеграбилна и њен интеграл је 1.

У наведеном примеру функција $f$ је прилично дивља. У случају функција с каквима се обично срећемо, овакве аномалије се не дешавају.

• Свака ограничена функција на сегменту $[a, b]$ са коначно много тачака прекида је интеграбилна.

Између осталог, непрекидне функције су интеграбилне.

На пример, ако је $d = b-a$, дијаметар низа подела $\Pi_n = (a, a+\frac{d}{n}, a+\frac{2d}{n}, \dots, a+\frac{(n-1)d}{n}, b)$ тежи нули. Зато, под претпоставком да је $f$ интеграбилна функција на сегменту $[a, b]$, одговарајуће интегралне суме са истакнутим тачкама $c_{i+1} = a + \frac{in}{d}$ за $i = 0, 1, \dots, n$ теже интегралу $\int_a^b f(x)dx$. Дакле,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{j}{n}d\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + \frac{j}{n}d\right).$$

*Пример 2.* Израчунати *по дефиницији* (помоћу интегралних сума) интеграле (а) $\displaystyle\int_0^1 e^x dx$; (б) $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$.

*Решење.* (а) Ако је $f(x) = e^x$, онда је

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n/n} - 1}{e^{1/n} - 1} = (e-1) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(e^{1/n} - 1)} = e - 1.$$

(б) Слично,

$$I = \int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}.$$

**Особине одређеног интеграла и његова веза са неодређеним**

Нека су $f$ и $g$ интеграбилне функције на сегменту $[a, b]$, тачка $c \in [a, b]$, а $k$ реална константа. Наредна тврђења се једноставно доказују.

• (i) Функције $kf$ и $f \pm g$ су такође интеграбилне и важи

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) Функције $fg$ и (под претпоставком да је $g$ свуда позитивна или свуда негативна) $f/g$ су такође интеграбилне.

(iii) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)dx$ и $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Интеграл константе $k$ је тривијално једнак $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k(b-a)$.

Даље, ако је функција $f$ ненегативна на сегменту $[a, b]$ и $b > a$, онда су све њене интегралне суме ненегативне. Узимањем лимеса када дијаметар поделе тежи нули следи $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Последица овог тврђења је да, ако на сегменту $[a, b]$ важи $m \leqslant f(x) \leqslant M$ за неке константе $m$ и $M$, онда је

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Фиксирајмо сада доњу границу интеграције $a$ и посматрајмо функцију

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

где је $f$ непрекидна функција.

- Функција $F$ је диференцијабилна и важи $F'(x) = f(x)$.

<u>*Доказ.*</u> Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. По дефиницији непрекидности, може се одабрати $\Delta x > 0$ тако да за свако $t \in [x, x + \Delta x]$ важи $f(x) - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant f(x) + \varepsilon$. Тада је

$$(f(x) - \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leqslant (f(x) + \varepsilon).$$

Пуштањем $\Delta x \to 0$ закључујемо да је

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x).$$

Према томе, $F$ је управо неодређени интеграл функције $f$. Овако добијамо везу између неодређеног и одређеног интеграла.

- *Њутн-Лајбницова теорема.* Ако је $\int f(x)dx = F(x) + C$, онда је

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

<u>*Пример 3.*</u> Наћи површину између $x$-осе и графика функције $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

<u>*Решење.*</u> То је полукруг пречника 2 и његова површина је $S = \pi/2$. Заправо, како је $\int f(x)dx = F(x) = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\big) + \text{const}$, имамо

$$S = \int_{-1}^1 f(x)dx = F(x)|_{-1}^1 = F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

### Смена променљиве и парцијална интеграција

Један начин да се у одређеном интегралу примени смена променљиве свакако је његово свођење на неодређени и потом употреба Њутн-Лајбницове теореме. Други начин је директна смена променљиве.

Дакле, ако у одређеном интегралу $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)dx$ уведемо смену $\left|{t=g(x) \atop dt=g'(x)dx}\right|$, где је функција $g$ диференцијабилна на целом интервалу $(a, b)$, онда се $t$ креће по интервалу $[g(a), g(b)]$ (како се $x$ креће по интервалу $[a, b]$), па важи

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt. \tag{1}$$

Ово је лако проверити. Заиста, ако су неодређени интеграли

$$\int f(t)dt = F(t) + \text{const} \quad \text{и одатле} \quad \int f(g(x))g'(x)dt = F(g(x)) + \text{const},$$

онда је $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} = F(t)\big|_{t=g(a)}^{t=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$

Услов дефинисаности и диференцијабилности функције $g$ на целом интервалу интеграције је кључан - без њега једнакост (1) не мора да важи.

Слично се понаша и парцијална интеграција. Наиме, пошто је $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx = \int_a^b (uv' + u'v)dx = \int_a^b (uv)'dx = u(x)v(x)\big|_{x=a}^{x=b}$, важи

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)du(x).$$

*Пример 4.* Израчунати $I = \displaystyle\int_1^3 x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$.

*Решење.* Користимо смену $\left|{t=x^2-1 \atop dt=2x\,dx}\right|$.

За $x=1$ и $x=3$ имамо редом $t=0$ и $t=8$, и то су границе у добијеном интегралу по $t$. Тако је $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^8 t^{1/3}dt = \dfrac{3}{8}t^{4/3}\Big|_0^8 = 6$.

*Пример 5.* Израчунати $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$.

*Решење.* Користимо парцијалну интеграцију $\left|{u=\operatorname{arctg}x \quad v=\frac{1}{3}x^3 \atop du=\frac{dx}{1+x^2} \quad dv=x^2\,dx}\right|$.

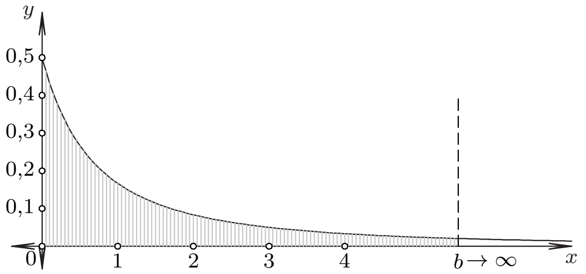
Имамо $I = \displaystyle\int_0^1 u\,dv = uv\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 v\,du = \frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg} x\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^2}$.

При томе је $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^2} =\left|{t=1+x^2 \atop dt=2x\,dx}\right|= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{t-1}{t}dt = \frac{1}{2}(t-\ln t)\Big|_{t=1}^{t=2} = \frac{1-\ln 2}{2}$, па је $I = \dfrac{\pi+2\ln 2-2}{12}$.

**Несвојствени интеграли**

*Несвојствени интеграл* је интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ у коме је $a=-\infty$ и/или $b=\infty$, или $f$ није дефинисано у неким тачкама интервала $[a,b]$. Овакав интеграл се не може дефинисати као лимес интегралне суме. Ипак, он има смисла као лимес одређеног интеграла.

*Пример 6.* Израчунати укупну површину испод графика функције $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ за $x \geqslant 0$.




*Решење.* Тражена површина је $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2}$.

Део ове површине у области $0 \leqslant x \leqslant b$ је $I_b = \int_0^b \frac{dx}{x^2+3x+2}$. Како је $\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) = \ln\frac{x+1}{x+2} + \mathrm{const}$, добијамо $I_b = \ln\frac{x+1}{x+2}\Big|_{x=0}^{x=b} = \ln 2 - \ln\frac{b+2}{b+1}$.

Површину $I$ добијамо пуштањем $b\to\infty$. Дакле, $I = \lim_{b\to\infty}\left(\ln 2 - \ln\frac{b+2}{b+1}\right) = \ln 2$.

Несвојствене интеграле са бесконачним границама уводимо једнакостима

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f\,dx = \int_{-\infty}^a f\,dx + \int_a^\infty f\,dx.$$

Такође је могуће да интегранд $f$ не буде дефинисан (на пример, да тежи бесконачности) у неким тачкама интервала. Ако је само један крај интервала, рецимо $c$, проблематичан, уводимо једноставно

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c^-}\int_a^b f(x)dx, \quad \text{односно} \quad \int_c^b f(x)dx = \lim_{a\to c^+}\int_a^b f(x)dx.$$

Ако $f$ није дефинисано у некој тачки $c$ унутар интервала $[a,b]$, интеграл бисмо рачунали као збир:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

*Пример 7.* Израчунати $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

*Решење.* Пошто подинтегрална функција није дефинисана за $x = 1$, интервал интеграције $[0,2]$ делимо на два дела: $[0,1] \cup [1,2]$. Неодређени интеграл је

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}} \overset{x=t^3+1}{\underset{dx=3t^2dt}{=}} \int 3t(t^3+1)dt = \frac{3}{10}t^2(2t^3+5) + \text{const} = \frac{3}{10}(2x+3)(x-1)^{2/3} + \text{const}.$$

Сада налазимо:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{b\to 1^-} \frac{3}{10}[(2b+3)(b-1)^{2/3} - 3] = -\frac{9}{10} \text{ и}$$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{a\to 1^+} \frac{3}{10}[7 - (2a+3)(a-1)^{2/3}] = \frac{21}{10},$$

па је $I = I_1 + I_2 = -\dfrac{9}{10} + \dfrac{21}{10} = \dfrac{6}{5}$.

**Задаци**

1. За $n \in \mathbb{N}$ израчунати: (а) $\displaystyle\int_0^1 x^n dx$; (б) $\displaystyle\int_0^\pi \sin nx\,dx$.

*Решење.* (а) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$, па је $\int_0^1 = \frac{1}{n+1}x^{n+1}|_0^1 = \frac{1}{n+1}(1^{n+1} - 0^{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ .

(б) $\int \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx + C$, па је $I_n = \int_0^\pi \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx|_0^\pi = \frac{2}{n}$ за $n$ непарно и $I_n = 0$ за $n$ парно.

2. Израчунати $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \cos 2x \cos 4x\,dx$.

*Решење.* Трансформација производа у збир даје $\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x)\cos 4x = \frac{1}{2}(\cos x \cos 4x + \cos 3x \cos 4x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos 5x + \cos x + \cos 7x)$. Како је $\int_0^{\pi/2} \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx|_0^{\pi/2} = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$, добијамо $I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}) = \frac{19}{105}$.

3. Израчунати $I = \displaystyle\int_{1/8}^{1/3} \frac{1-x}{\sqrt{x^2+x}}dx$.

*Решење.* Ојлерова смена $\sqrt{x^2+x} = x + t$: $x^2 + x = x^2 + 2tx + t^2$, тј. $x = \frac{t^2}{1-2t}$, $\sqrt{x^2+x} = \frac{t-t^2}{1-2t}$, $dx = \frac{2t-2t^2}{(1-2t)^2}dt$. Када $x$ иде од $\frac{1}{8}$ до $\frac{1}{3}$, $t$ иде од $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{3}$. Према томе, $I = \int_{1/4}^{1/3} \frac{1-\frac{t^2}{1-2t}}{\frac{t-t^2}{1-2t}} \cdot \frac{2t-2t^2}{(1-2t)^2}dt = 2\int_{1/4}^{1/3} \frac{1-2t-t^2}{(1-2t)^2}dt$.

Имамо $\frac{1-2t-t^2}{(1-2t)^2} = -\frac{1}{4} + \frac{-3t+\frac{5}{4}}{(1-2t)^2} = -\frac{1}{4} + \frac{3/2}{1-2t} - \frac{1/4}{(1-2t)^2}$, па је $\int \frac{1-2t-t^2}{(1-2t)^2}dt = -\frac{1}{4}t - \frac{3}{4}\ln|1-2t| - \frac{1}{8(1-2t)} + C$ и $I = 2[-\frac{1}{4}t - \frac{3}{4}\ln|1-2t| - \frac{1}{8(1-2t)}]|_{1/4}^{1/3} = \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{7}{24}$.

4. Израчунати $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ .

*Решење.* У овом задатку одговарајући неодређени интеграл није елементарна функција. Ипак, дати одређени интеграл може се израчунати захваљујући симетрији подинтегралне функције.

Означимо $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ и приметимо да је $f(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = \frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+1} = 1$. Зато је $\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/4} f(x)dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/4} f(x)dx + \int_0^{\pi/4} f(\frac{\pi}{2} - x)dx = \int_0^{\pi/4}[f(x)dx + f(\frac{\pi}{2} - x)]dx = \int_0^{\pi/4} 1\,dx = \frac{\pi}{4}$.

5. Израчунати $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, где је $n \geqslant 0$ цео број.

*Решење.* Одговарајући неодређен интеграл је израчунат раније. Овде понављам рачун због значаја.

Имамо $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int \sin^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx = I_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx$. Коришћењем парцијалне интеграције $\begin{vmatrix} u=\cos x, & v=\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x \\ du=-\sin x\, dx, & dv=\sin^{n-2}x\cos x\, dx \end{vmatrix}$ добићемо $I_{n-2} - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x = \int_0^{\pi/2} u\, dv = uv|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} v\, du = \frac{1}{n-1}\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n x = \frac{1}{n-1} I_n$. Дакле, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Како је $I_0 = \frac{\pi}{2}$ и $I_1 = 1$, коначно добијамо

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \text{ парно}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ непарно}, \end{cases}$$

где је $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots$

6. Израчунати интеграл $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx$.

<u>*Решење.*</u> Направићемо рекурентну везу за $I_n$. Како је $\sin nx - \sin(n-2)x = 2\sin x \cos(n-1)x$, интеграцијом следи $I_n - I_{n-2} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{2\sin x\cos(n-1)x}{\sin x}\, dx = 2\int_0^\pi \cos(n-1)x = 0$ за $n > 1$. Према томе, за $n \geqslant 2$ важи $I_n = I_{n-2}$.

Следи да је $I_n = I_{n-2} = I_{n-4} = \cdots = I_0 = 0$ ако је $n$ парно, а $I_n = I_{n-2} = \cdots = I_1 = \pi$ ако је $n$ непарно.

7. Који од следећих несвојствених интеграла дивергирају? Израчунати оне који конвергирају: (а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$; (б) $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x^4} dx$; (в) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\, dx$.

<u>*Решење.*</u> (а) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x|_0^b = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$.

(б) Смена $y = x^4$, $dy = 4x^3 dx$: $I = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-y} dy = \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-y} dy = -\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty} e^{-y}|_0^b = \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}(1-e^{-b}) = \frac{1}{4}$.

(в) $\int_0^\infty \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty}(1-\cos b)$, што не постоји, тј. интеграл дивергира.

8. Израчунати (а) $I_p = \displaystyle\int_0^1 x^p dx$ за $-1 < p < 0$; (б) $J_p = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\, dx$ за $p > -1$.

<u>*Решење.*</u> (а) Овај интеграл је несвојствен јер $x^p$ није дефинисано за $x = 0$, Ипак, пошто је $\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}$, и овде важи $I_p = \frac{1}{p+1}x^{p+1}|_0^1 = \frac{1}{p+1}$.

(б) Интеграл је несвојствен јер $x^p \ln x$ није дефинисано за $x = 0$.

Парцијална интеграција $\begin{vmatrix} u=\ln x, & v=\frac{x^{p+1}}{p+1} \\ du=dx/x, & dv=x^p dx \end{vmatrix}$ даје $J_p = \int_0^1 udv = \lim_{t\to 0} u(x)v(x)|_t^1 - \int_0^1 vdu = 0 - \frac{1}{p+1}\lim_{t\to 0} t^{p+1}\ln t - \frac{1}{p+1}\int_0^1 x^p dx$. Како је $\frac{1}{p+1}\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{(p+1)^2}$ и по Лопиталовом правилу је $\lim_{t\to 0} t^{p+1}\ln t = \lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{t^{-1-p}} = \lim_{t\to 0}\frac{t^{-1}}{(-1-p)t^{-2-p}} = -\frac{1}{p+1}t^{p+1} = 0$, следи $J_p = -\frac{1}{(p+1)^2}$.

9. Израчунати $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx$.

<u>*Решење.*</u> Смена $t = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$, тј. $\begin{vmatrix} x=\frac{1}{t^2-1} \\ dx=\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2} \end{vmatrix}$ даје $I = \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{2t^2 dt}{(t^2-1)^2}$. Ако запишемо $\frac{2t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} = \frac{A(t^3+t^2-t-1)+B(t^2+2t+1)+C(t^3-t^2-t+1)+D(t^2-2t+1)}{(t^2-1)^2}$, добићемо $A+C=0$, $A+B-C+D=2$, $-A+2B-C-2D=0$ и $-A+B+C+D=0$, и одатле $A=B=D=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$. Дакле, $I = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^\infty \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}\right) dt = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\ln\frac{t-1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1})|_{\sqrt{2}}^b = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)$.

10. Израчунати $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$, где је $n \geqslant 0$ цео број.

<u>*Решење.*</u> Парцијална интеграција $\begin{vmatrix} u=x^n, & v=-e^{-x} \\ du=nx^{n-1}dx, & dv=e^{-x}dx \end{vmatrix}$ даје $I_n = -\lim_{b\to\infty} x^n e^{-x}|_0^b + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = nI_{n-1}$. Како је $I_0 = 1$, одавде добијамо $I_n = n!$.

<u>*Напомена.*</u> Функција

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}dx$$

је позната као *Гама-функција*. Показали смо да је $\Gamma(y) = (y-1)!$ ако је $y$ ненегативан цео број.

11. Израчунати $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2+\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

*Решење.* Уведимо $\left|\begin{smallmatrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}\end{smallmatrix}\right|$. Тада је $\frac{2+\sin x}{2+\cos x} = \frac{2(t^2+t+1)}{t^2+3}$, а границе интеграла ће бити $t(0)=0$ и $t(2\pi)=0$. Добили смо $I=\int_0^0 \frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}\,dt$, што је нула. Међутим, као интеграл позитивне функције на $[0,2\pi]$, дати интеграл очито није нула - где је грешка?

Спорне су границе од 0 до 0. Наиме, услови за смену променљиве нису задовољени јер $t$ није дефинисано за $x=\pi$. Уместо тога, интеграл $I$ пишемо као збир $I=I_1+I_2$, где је $I_1=\int_0^{\pi}\frac{2+\sin x}{2+\cos x}\,dx$ и $I_2=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{2+\sin x}{2+\cos x}\,dx$. Оба интеграла се поменутом сменом своде на несвојствене: $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}\,dt$ и $I_2=\int_{-\infty}^{0}\frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}\,dt$.

Како је $\frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}=\frac{2t}{t^2+1}+\frac{4-2t}{t^2+3}$, имамо $\int\frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}\,dt=\ln\frac{t^2+1}{t^2+3}+\frac{4}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt3}+\text{const}$. Отуда је $I_1=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{4(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}\,dt=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{b^2+1}{b^2+3}+\frac{4}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt3}-\ln\frac13\right)=\frac{2\pi}{\sqrt3}-\ln\frac13$. Слично се добија $I_2=\frac{2\pi}{\sqrt3}+\ln\frac13$ и, коначно, $I=\frac{4\pi}{\sqrt3}\approx 7{,}2552$.

12. Израчунати интеграл $I=\displaystyle\int_0^1\ln(x-x^3)dx$.

*Решење.* Интервал интеграције $[0,1]$ делимо на два дела: нпр. $[0,\frac12]\cup[\frac12,1]$.

Неодређени интеграл је $\int\ln(x-x^3)dx=\left|\begin{smallmatrix} u=\ln(x-x^3) & v=x \\ du=\frac{1-3x^2}{x-x^3}dx & dv=dx\end{smallmatrix}\right|=\int u\,dv=uv-\int v\,du=x\ln(x-x^3)-\int\frac{1-3x^2}{1-x^2}dx=x\ln(x-x^3)-3x+\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\text{const}$.

Сада налазимо:
$\displaystyle\int_0^{\frac12}\ln(x-x^3)dx=\lim_{a\to0^+}\int_a^{\frac12}\ln(x-x^3)dx=\frac12\ln\frac{27}{8}-\frac32-\lim_{a\to0^+}\left[a\ln(a-a^3)-3a+\ln\left|\tfrac{1+a}{1-a}\right|\right]=\frac12\ln\frac{27}{8}-\frac32$; $\displaystyle\int_{\frac12}^1\ln(x-x^3)dx=\lim_{b\to1^-}\int_{\frac12}^b\ln(x-x^3)dx=\lim_{b\to1^-}\left[b\ln(b-b^3)-3b+\ln\left|\tfrac{1+b}{1-b}\right|\right]-\frac12\ln\frac{27}{8}-\frac32$. Како је при томе $\lim_{b\to1^-}\left[b\ln(b-b^3)-3b+\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right]=\lim_{b\to1^-}\left[\ln(b-b^3)+\ln\left|\frac{1+b}{1-b}-(1-b)\ln(b-b^3)-3b\right|\right]=\lim_{b\to1^-}\left[\ln(b(1+b)^2)-(1-b)\ln(b-b^3)-3b\right|\right]=\ln4-3-\lim_{b\to1^-}(1-b)\ln(b-b^3)=\ln4-3$ по Лопиталовом правилу, следи $I=\int_0^{\frac12}+\int_{\frac12}^1=\ln4-3\approx-1{,}61371$.

13. Израчунати $I=\displaystyle\int_0^1\ln(x^3+1)dx$.

14. Израчунати $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\sin^2x}\,dx$.

15. Израчунати $I=\displaystyle\int_1^2\sqrt{2^{3x-1}+1}\,dx$.

16. За које $p$ интеграл $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}$ конвергира?

17. Израчунати $I=\displaystyle\int_0^1 x^7\sin(3\ln x)dx$.

18. Израчунати (а) $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$ ; (б) $J=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$ .

19. Израчунати $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}$.

20. Израчунати $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{\sqrt[4]{x}}$.

**Одговори на задатке 13-20.**

13. $I = 2\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 3 \approx 0{,}20009$.

14. Смена $t = \cos x$: $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{2 - t^2}\, dt = 1 + \frac{\pi}{2} \approx 2{,}5708$.

15. $I = 1 + \frac{2}{\ln 8} \left( \sqrt{33} - \sqrt{5} + \ln \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{33}} \right) \approx 3{,}66814$.

16. За $p > 1$: тада je $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^p x} = \frac{1}{1-p} \ln^{1-p} x + C|_2^\infty = \frac{\ln 2}{p-1}$, али $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} = \ln\ln x|_2^\infty = \infty$.

17. $I = -\frac{3}{73} \approx 0{,}041096$.

18. $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2{,}22144$, $J = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}0944$.

19. $I = \frac{1}{4} \left( \pi\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} - \ln 7 \right) \approx 1{,}61612$.

20. $I = 4\ln 2 - \frac{16}{9} - \frac{2}{3}\pi \approx -1{,}09958$.