

Интегралы - задаци

Јелена Томановић

НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Интегралы који се свде на табличне

Правила интеграције

- хомогеност: $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \quad \alpha \neq 0$
- адитивност: $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

Таблица интеграла

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

Напомена: $\int dx = x + C, \quad \int 0dx = C$ (не 0)

Задаци

1. $\int (6x^2 + 7) dx \quad (2x^3 + 7x + C)$
2. $\int \left(2x^2 + \frac{3}{x} - \sin x \right) dx \quad \left(\frac{2}{3}x^3 + 3 \ln |x| + \cos x + C \right)$
3. $\int \left(\frac{1}{2}e^x - 2 \cos x + 3x^{-1/2} \right) dx \quad \left(\frac{1}{2}e^x - 2 \sin x + 6\sqrt{x} + C \right)$
4. $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx \quad \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln |x| + C \right)$
5. $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx \quad \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \ln |x| + \frac{1}{x} + C \right)$
6. $\int \frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2} dx \quad \left(-\frac{2}{x} - \ln |x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + C \right)$
7. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad \left(\frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{3}{2}x^{2/3} + C \right)$
8. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1} \quad \left(\frac{1}{3}x^3 - x + \operatorname{arctg} x + C \right)$
9. $\int (1+\sqrt{x})^4 dx \quad \left(x + \frac{8}{3}x^{3/2} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{5/2} + \frac{1}{3}x^3 + C \right)$
10. $\int (1+\sqrt{x})^{1000} dx \quad \left(2 \sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} \frac{x^{k/2+1}}{k+2} + C \right)$
11. $\int \frac{dx}{2^x} \quad \left(-\frac{1}{2^x \ln 2} + C \right)$
12. $\int 3^{-x} dx \quad \left(-\frac{1}{3^x \ln 3} + C \right)$

$$13. \int \frac{2^{x+1} + 3^{x-1}}{6^x} dx \quad \left(-\frac{2}{3^x \ln 3} - \frac{1}{3 \cdot 2^x \ln 2} + C \right)$$

$$14. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C)$$

$$15. \int \operatorname{tg}^2 x dx \quad (\operatorname{tg} x - x + C)$$

$$16. \int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx \quad \left(\frac{8}{15} x^{15/8} + C \right)$$

$$17. \int \sqrt[6]{x^5} \sqrt[4]{x^3} \sqrt{x} dx \quad \left(\frac{48}{95} x^{95/48} + C \right)$$

Смена променљиве

$$\int f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t)$$

Задаци

$$18. \int (2x + 3)^{1000} dx \quad \left(\frac{(2x + 3)^{1001}}{2002} + C \right)$$

$$19. \int \frac{dx}{3x - 2} \quad \left(\frac{1}{3} \ln |3x - 2| + C \right)$$

$$20. \int \cos 2x dx \quad \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C \right)$$

$$21. \int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x} dx \quad (\ln |x^3 - 2x| + C)$$

$$22. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \quad \left(\frac{3}{4} (x^2 - 1)^{2/3} + C \right)$$

$$23. \int \frac{2x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad \left(-2\sqrt{1 - x^2} - \frac{2}{3} (\arcsin x)^{3/2} + C \right)$$

$$24. \int \frac{dx}{x \ln x} \quad (\ln |\ln x| + C)$$

25. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} \quad (\ln |\ln(\ln x)| + C)$
26. $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} \quad (\operatorname{arctg} e^x + C)$
27. $\int \frac{e^{3x} - 1}{e^x - 1} dx \quad \left(\frac{1}{2} e^{2x} + e^x + x + C \right)$
28. $\int x(1-x)^{10} dx \quad \left(\frac{(1-x)^{12}}{12} - \frac{(1-x)^{11}}{11} + C \right)$
29. $\int x^5(2-5x^3)^{2/3} dx \quad \left(\frac{1}{200}(2-5x^3)^{8/3} - \frac{2}{125}(2-5x^3)^{5/3} + C \right)$
30. $\int x\sqrt{x+2} dx \quad \left(\frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+2)^{3/2} + C \right)$
31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (2 \arcsin \sqrt{x} + C)$
32. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} \quad \left(\frac{2}{3} ((x+2)^{3/2} + (x+1)^{3/2}) + C \right)$
33. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad (\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C)$
34. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + C, \quad -\arcsin \frac{1}{x} + C \right)$
35. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} \quad (6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C)$
36. $\int \sqrt{1-x^2} dx \quad \left(\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x) + C \right)$
37. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} \quad \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \right)$
38. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \left(\arcsin \frac{x}{a} + C \right)$
39. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx \quad \left(a^2 \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{4} \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \right) + C \right)$

40. $\int \operatorname{tg} 3x dx \quad \left(-\frac{1}{3} \ln |\cos 3x| + C \right)$
41. $\int \sin 3x \sin 6x dx \quad \left(\frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{18} \sin 9x + C \right)$
42. $\int \cos x \cos 2x \cos 5x dx \quad \left(\frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{32} \sin 8x + C \right)$
43. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos 2x}} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x \right) + C \right)$
44. $\int \sin^4 x \sin 2x dx \quad \left(\frac{1}{3} \sin^6 x + C \right)$
45. $\int \sin^2 x dx \quad \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \right)$
46. $\int \sin^4 x dx \quad \left(\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \right)$
47. $\int \sin^5 x dx \quad \left(-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x + C \right)$
48. $\int \frac{dx}{\sin x} \quad \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \right)$
49. $\int \frac{dx}{\cos x} \quad \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \pi/2}{2} \right| + C \right)$
50. $\int \frac{x dx}{\sin x^2} \quad \left(\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x^2}{2} \right| + C \right)$
51. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \quad \left(\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\arcsin x}{2} \right| + C \right)$
52. $\int \frac{dx}{1 - \cos x} \quad \left(-\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C \right)$
53. $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx \quad \left(\sqrt{1 + \sin 2x} + C \right)$

Парцијална интеграција

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Задачи

54. $\int x e^x dx$ $(x e^x - e^x + C)$
55. $\int x^2 e^{3x} dx$ $\left(\frac{1}{27}(9x^2 - 6x + 2)e^{3x} + C\right)$
56. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ $(x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C)$
57. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$ $(-x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C)$
58. $\int \ln x dx$ $(x \ln x - x + C)$
59. $\int \ln^2 x dx$ $(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C)$
60. $\int \operatorname{arctg} x dx$ $\left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C\right)$
61. $\int \arcsin x dx$ $\left(x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C\right)$
62. $\int x^2 \arccos x dx$ $\left(\frac{1}{3} \left(x^3 \arccos x + \frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} - (1 - x^2)^{1/2}\right) + C\right)$
63. $\int (\arcsin x)^2 dx$ $\left(x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x + C\right)$
64. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$ $(x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C)$
65. $\int x^3 \cos 2x dx$ $\left(\frac{1}{2} x^3 \sin 2x + \frac{3}{4} x^2 \cos 2x - \frac{3}{4} x \sin 2x - \frac{3}{8} \cos 2x + C\right)$
66. $\int x \ln^2 x dx$ $\left(\frac{x^2}{4}(2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C\right)$
67. $\int x^2 \ln^3 x dx$ $\left(\frac{x^3}{27}(9 \ln^3 x - 9 \ln^2 x + 6 \ln x - 2) + C\right)$

$$\begin{aligned}
68. \int x \ln \frac{x+1}{x} dx & \quad \left(\frac{1}{2} \left(x^2 \ln \frac{x+1}{x} + x - \ln |x+1| \right) + C \right) \\
69. \int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx & \quad \left(\sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x + C \right) \\
70. \int e^x \sin x dx & \quad \left(\frac{\sin x - \cos x}{2} e^x + C \right) \\
71. \int e^{ax} \sin bx dx & \quad \left(\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C \right) \\
72. \int e^{ax} \cos bx dx & \quad \left(\frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C \right) \\
73. \int \cos(\ln x) dx & \quad \left(\frac{\cos(\ln x) + \sin(\ln x)}{2} x + C \right) \\
74. \int x \sin \sqrt{x} dx & \quad (-2x\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 6x \sin \sqrt{x} + 12\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x} + C)
\end{aligned}$$

Рекурентне формуле

Задаци

$$\begin{aligned}
75. I_n = \int \ln^n x dx & \quad (I_n = x \ln^n x - n I_{n-1}, I_1 = x \ln x - x + C) \\
I_4 = \int \ln^4 x dx & \quad (I_4 = x \ln^4 x - 4(x \ln^3 x - 3(x \ln^2 x - 2(x \ln x - x)))) + C \\
76. I_n = \int x^n e^x dx & \quad (I_n = x^n e^x - n I_{n-1}, I_0 = e^x + C) \\
I_5 = \int x^5 e^x dx & \quad (I_5 = e^x(x^5 - 5(x^4 - 4(x^3 - 3(x^2 - 2(x - 1)))))) + C) \\
77. I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n} & \quad \left(I_n = \frac{x}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}, I_1 = \operatorname{arctg} x + C \right) \\
I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} & \quad \left(I_3 = \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3x}{8(x^2 + 1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C \right)
\end{aligned}$$

$$78. I_n = \int \sin^n x dx$$

$$\left(I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, I_1 = -\cos x + C, I_2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \right)$$

$$I_7 = \int \sin^7 x dx$$

$$\left(I_7 = -\frac{\sin^6 x \cos x}{7} + \frac{6}{7} \left(-\frac{\sin^4 x \cos x}{5} + \frac{4}{5} \left(-\frac{\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{2}{3} (-\cos x) \right) \right) \right) + C$$

$$I_8 = \int \sin^8 x dx$$

$$\left(I_8 = -\frac{\sin^7 x \cos x}{8} + \frac{7}{8} \left(-\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6} \left(-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \right) \right) \right) + C$$

$$79. I_n = \int \cos^n x dx$$

$$\left(I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, I_1 = \sin x + C, I_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \right)$$

$$I_5 = \int \cos^5 x dx$$

$$\left(I_5 = \frac{\cos^4 x \sin x}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x \right) + C \right)$$

$$I_6 = \int \cos^6 x dx$$

$$\left(I_6 = \frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5}{6} \left(\frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \right) + C \right)$$

Интеграција рационалних функција

Задачи

$$80. \int \frac{xdx}{(x-3)(x+1)} \quad \left(\frac{3}{4} \ln |x-3| + \frac{1}{4} \ln |x+1| + C \right)$$

$$81. \int \frac{3-2x}{x^2-x-2} dx \quad \left(-\frac{1}{3} \ln |x-2| - \frac{5}{3} \ln |x+1| + C \right)$$

$$82. \int \frac{dx}{1-x^2} \quad \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C \right)$$

$$83. \int \frac{dx}{x^2-a^2} \quad \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \right)$$

84. $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^3 - x} dx \quad \left(\ln \left| \frac{x^3(x-1)}{x+1} \right| + C \right)$
85. $\int \frac{2x^2 dx}{x^4 - 1} \quad \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \operatorname{arctg} x + C \right)$
86. $\int \frac{1-x}{x^2 + 2x + 1} dx \quad \left(-\ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + C \right)$
87. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)} \quad \left(\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| - \frac{1}{x} + C \right)$
88. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2} \quad \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C \right)$
89. $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx \quad \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + 9 \ln|x-2| - 2 \ln|x-1| + C \right)$
90. $\int \frac{dx}{1 + 2x^2} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} x\sqrt{2} + C \right)$
91. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \right)$
92. $\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 2} \quad \left(\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C \right)$
93. $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1} dx \quad \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} + C \right)$
94. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} \quad \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \operatorname{arctg} x \right) + C \right)$
95. $\int \frac{dx}{(2x^2 + x + 1)^3} \quad \left(\left(\frac{2}{\sqrt{7}} \right)^5 \left(\frac{\frac{4x+1}{\sqrt{7}}}{\left(\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1 \right)^2} + \frac{3 \frac{4x+1}{\sqrt{7}}}{2 \left(\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1 \right)} + \frac{3 \operatorname{arctg} \frac{4x+1}{\sqrt{7}}}{2} \right) + C \right)$
96. $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx \quad \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right| + C \right)$

$$\begin{aligned}
97. \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx & \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} + C \right) \\
98. \int \frac{dx}{x^4 + 1} & \quad \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \left| \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right| - 2 \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} \right) + C \right) \\
99. \int \frac{e^x dx}{2e^{2x} - 7e^x + 3} & \quad \left(\frac{1}{5} \ln \left| \frac{e^x - 3}{2e^x - 1} \right| + C \right) \\
100. \int \frac{2 \sin x}{\cos^4 x - 3 \cos^2 x - 4} dx & \quad \left(\frac{1}{20} \ln \left| \frac{\cos x - 2}{\cos x + 2} \right| - \frac{1}{5} \operatorname{arctg}(\cos x) + C \right)
\end{aligned}$$

Интеграција рационалних тригонометријских функција

$$\begin{aligned}
\int R(\sin x, \cos x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int R^*(t) dt \\
\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int R^*(t) dt \\
\int R(\sin x) \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int R(t) dt \\
\int R(\cos x) \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = - \int R(t) dt
\end{aligned}$$

Задаци

$$\begin{aligned}
101. \int \frac{dx}{\sin x} & \quad \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \right) \\
102. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 3} & \quad \left(\operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) + C \right) \\
103. \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x} & \quad \left(\frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 3 \right) \right| + C \right)
\end{aligned}$$

$$104. \int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx \quad \left(2 \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| - x + C \right)$$

$$105. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C \right)$$

$$106. \int \frac{dx}{\cos^4 x} \quad \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C \right)$$

$$107. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} \quad \left(\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} + C \right)$$

$$108. \int \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx \quad \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x + C \right)$$

$$109. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx \quad \left(-\frac{1}{\sin x} - \sin x + C \right)$$

$$110. \int \sin^2 x \cos^3 x dx \quad \left(-\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C \right)$$

$$111. \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx \quad \left(\frac{2}{\cos x} + C \right)$$

Интеграција ирационалних функција

$$\text{I. } I = \int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx, \quad \neg(a=0 \wedge c=0)$$

$$1. \ ad \neq bc: \quad \frac{ax+b}{cx+d} = t^m, \quad x = \dots, \quad dx = \dots; \quad I = \int R^*(t) dt$$

$$2. \ ad = bc: \quad \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}; \quad I = \int R^*(x) dx$$

Задаци

$$112. \int \frac{1}{(1+x)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \quad \left(-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C \right)$$

$$113. \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad \left(\ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C \right)$$

$$114. \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx \quad \left(\frac{1}{4} \left(\ln \left| \sqrt{x^2-1} - x \right| + x + 1 \right) + C \right)$$

$$115. \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \quad (-2 \operatorname{arctg} \sqrt{1-x} + C)$$

$$116. \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx \quad \left(\frac{3}{20} (2x+1)^{5/3} - \frac{9}{8} (2x+1)^{2/3} + C \right)$$

II₁. $I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ – тригонометријске и хиперболичке смене

$$1. I = \dots = \int R^*(t, \sqrt{t^2+1}) dt = \{t = \operatorname{tg} s \text{ или } t = \operatorname{sh} s\} = \dots$$

$$2. I = \dots = \int R^*(t, \sqrt{t^2-1}) dt = \left\{ t = \frac{1}{\cos s} \text{ или } t = \operatorname{ch} s \right\} = \dots$$

$$3. I = \dots = \int R^*(t, \sqrt{1-t^2}) dt = \{t = \sin s \text{ или } t = \operatorname{th} s\} = \dots$$

Задаци

$$117. \int \sqrt{x^2+1} dx \quad \left(\frac{1}{8} (x + \sqrt{x^2+1})^2 + \frac{1}{2} \ln (x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{8} \frac{1}{(x + \sqrt{x^2+1})^2} + C \right)$$

$$118. I = \int \sqrt{2x^2+3x+3} dx$$

$$\left(A = \frac{4x+3}{\sqrt{15}} + \sqrt{\left(\frac{4x+3}{\sqrt{15}}\right)^2 + 1}, \quad I = \frac{15}{8\sqrt{2}} \left(\frac{1}{8} A^2 + \frac{1}{2} \ln A - \frac{1}{8} \frac{1}{A^2} \right) + C \right)$$

$$119. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \quad \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} x + \pi/2}{2} \right| + C; \quad \ln (x + \sqrt{x^2+1}) + C \right)$$

$$120. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \quad \left(\ln \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \right) + C \right)$$

$$121. \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$\left(-\frac{1}{\sin(\operatorname{arctg}(x+1))} + C; \quad -\frac{2}{(x+1 + \sqrt{x^2+2x+2})^2 + 1} + C \right)$$

$$122. \int \sqrt{x^2 - 1} dx \quad \left(\frac{1}{8} (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 - \frac{1}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{1}{8} \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} + C \right)$$

$$123. I = \int \sqrt{2x^2 - 3} dx \\ \left(A = x\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}x^2 - 1}, \quad I = \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{8} A^2 - \frac{1}{2} \ln A - \frac{1}{8} \frac{1}{A^2} \right) + C \right)$$

$$124. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\arccos \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}}{2} \right| + C; \quad \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) + C \right)$$

$$125. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3x + 1}} \quad \left(\ln \left(\frac{2x - 3}{\sqrt{5}} + \sqrt{\left(\frac{2x - 3}{\sqrt{5}} \right)^2 - 1} \right) + C \right)$$

$$126. \int \sqrt{1 - x^2} dx \quad \left(\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x) + C \right)$$

$$127. \int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx \quad \left(2 \arcsin \frac{x + 1}{2} + \sin \left(2 \arcsin \frac{x + 1}{2} \right) + C \right)$$

$$128. \int \sqrt{x - 4x^2} dx \quad \left(\frac{1}{64} \arcsin(8x - 1) + \frac{1}{128} \sin(2 \arcsin(8x - 1)) + C \right)$$

II₂. $I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ – Ојлерове смене

$$1. ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} :$$

$$a(x - x_1) = (x - x_2)t^2, \quad x = \dots, \quad dx = \dots$$

$$2. a > 0 : \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{ax}, \quad x = \dots, \quad dx = \dots$$

$$3. c > 0 : \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}, \quad x = \dots, \quad dx = \dots$$

$$I = \int R^*(t) dt$$

Задаци

$$129. \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \quad \left(2\sqrt{\frac{x - 2}{x - 1}} + C \right)$$

$$130. \int \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}} \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1}{\sqrt{3}} + C \right)$$

$$131. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+3}} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2x+3}-x+\sqrt{3}} \right| + C \right)$$

$$132. I = \int \sqrt{x^2-2x+2} dx \\ \left(A = \sqrt{x^2-2x+2}, \quad \frac{1}{4} \left(\frac{(A+x)^2}{2} - A - x + 2 \ln |A+x| - \frac{1}{2(A+x-1)^2} \right) + C \right)$$

$$133. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} \quad \left(\ln \left| \frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{\sqrt{1-x-x^2}-1-2x} \right| + C \right)$$

III. Метод Остроградског

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Задаци

$$134. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \quad \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\sqrt{x^2-x+1} + \ln \left(\frac{1}{\sqrt{3}} (2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}) \right) \right) + C$$

$$135. \int \frac{x^3+1}{\sqrt{1-x-x^2}} dx \quad \left(\left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{31}{24} \right) \sqrt{1-x-x^2} - \frac{1}{16} \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C \right)$$

IV. Биноми интеграл: $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$

$$x^n = t$$

$$1. p \in \mathbb{Z} : \quad t = s^k, \quad k \text{ (најмањи) именилац } \frac{m+1}{n}$$

$$2. \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} : \quad a+bt = s^k, \quad k \text{ (најмањи) именилац } p$$

$$3. \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} : \quad \frac{a+bt}{t} = s^k, \quad k \text{ (најмањи) именилац } p$$

Задаци

$$136. \int x^{-11}(1+x^4)^{-1/2} dx \quad \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1+x^4}{x^4} \right)^{5/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1+x^4}{x^4} \right)^{3/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1+x^4}{x^4} \right)^{1/2} + C \right)$$

$$137. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} \quad \left(-\frac{1}{2(1+\sqrt[4]{x})^8} + \frac{4}{9(1+\sqrt[4]{x})^9} + C \right)$$

$$138. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad (2(1+x^{1/3})^{3/2} + C)$$

ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Правила интеграције

- хомогеност: $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- адитивност по интегранду: $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- адитивност по области интеграције: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \pm \int_c^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- $f(-x) = -f(x): \int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad f(-x) = f(x): \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Њутн-Лајбницева формула

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)] \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt \\ a \rightarrow \alpha, \quad b \rightarrow \beta \end{array} \right\}$$

Смена променљиве

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt \\ a \rightarrow \alpha, \quad b \rightarrow \beta \end{array} \right\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) d\varphi(t)$$

Парцијална интеграција

$$\int_a^b u dv = [uv] \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Задаци

139. $\int_{\pi/4}^{\pi/6} \cos x dx$ $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
140. $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$ $\left(\frac{(e-1)^5}{5}\right)$
141. $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \arcsin x dx$ $\left(\frac{(2\sqrt{2}-1)\pi - 4}{4\sqrt{2}}\right)$
142. $\int_9^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$ $(4(3 - \sqrt{2}))$
143. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ $\left(\ln \frac{27\sqrt{3}}{32\sqrt{2}}\right)$
144. $\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right) dt$ $\left(\frac{T \cos \varphi}{\pi}\right)$
145. $\int_0^\pi \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx$ (2)
146. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$ $(7 + 2 \ln 2)$
147. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin 3x dx$ $\left(-\frac{1}{27}(3\pi + 2)\right)$
148. $\int_{-5}^5 x^4 \sin 5x dx$ (0)
149. $I_n = \int_1^e \ln^n x dx$ $(I_n = e - nI_{n-1}, I_1 = 1)$
 $I_4 = \int_1^e \ln^4 x dx$ $(I_4 = 3(3e - 4))$

$$150. I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \quad \left(I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, n \text{ непарно} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, n \text{ парно} \end{cases} \right)$$

$$I_{12} = \int_0^{\pi/2} \sin^{12} x dx \quad \left(I_{12} = \frac{231\pi}{2048} \right)$$

$$151. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \quad \left(1 - \frac{3}{2} \ln 3 \right)$$

$$152. \int_{-b}^b \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad \left(a^2 \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \frac{b}{a} \right) \right) \right)$$

НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ

Задаци

$$153. \int_{-\infty}^0 e^x dx \quad (\text{конвергира ка } 1)$$

$$154. \int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad (\text{конвергира ка } 1)$$

$$155. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx \quad (\text{конвергира ка } 2)$$

$$156. \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \quad (\text{конвергира ка } 1)$$

$$157. \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} \quad (\text{одређено дивергира ка } \infty)$$

$$158. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{конвергира ка } \pi)$$

$$159. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \quad (\text{конвергира ка } \pi)$$

$$160. \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} \quad (\text{конвергира ка } 2)$$

161. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ (одређено дивергира ка ∞)
162. $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$, $k > 0$
 (за $0 < k < 1$ конвергира ка $\frac{1}{1-k}$, за $k \geq 1$ одређено дивергира ка ∞)
163. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/3}}$ (одређено дивергира ка ∞)
164. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ (конвергира ка 1)
165. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$, $k > 0$
 (за $k > 1$ конвергира ка $\frac{1}{k-1}$, за $0 < k \leq 1$ одређено дивергира ка ∞)
166. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^k}$, $k > 0$ (одређено дивергира ка ∞ (за свако k))
167. $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ ($n \in \mathbb{N}_0$), $I_5 = \int_0^\infty x^5 e^{-x} dx$ ($I_n = n!$, $I_5 = 120$)
168. $I_n = \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-x^2} dx$ ($n \in \mathbb{N}_0$), $I_6 = \int_0^\infty x^{13} e^{-x^2} dx$ ($I_n = \frac{1}{2}n!$, $I_6 = 360$)

ПРИМЕНЕ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛ

Површина равне фигуре

- Декартове координате – $x \in [a, b]$, $y = y(x) \geq 0$: $P = \int_a^b y(x) dx$
- Декартове координате – $y \in [c, d]$, $x = x(y) \geq 0$: $P = \int_c^d x(y) dy$

- Параметарски – $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta] : P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\dot{x}(t)dt$
- Поларне координате – $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi : P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$

Задаци

169. Применом одређеног интеграла израчунати површину оног дела круга $\mathcal{K}(0, r)$ који се налази у првом квадранту. $\left(\frac{r^2\pi}{4}\right)$
170. Израчунати површину фигуре омеђане кружницом $\mathcal{K} : x^2 + y^2 = 16$ и параболом $\mathcal{P} : y^2 = 6x$. $\left(\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})\right)$
171. Израчунати површину фигуре омеђане кривама $y = \operatorname{tg} x, y = \frac{2}{3} \cos x$ и y -осом. $\left(\frac{1}{3} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
172. Израчунати површину фигуре омеђане кривама $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$. $(3 - e)$
173. Израчунати површину фигуре омеђане параболом $y^2 = 4(1 + x)$, кружницом $x^2 + y^2 = 4$ и њеном тангентом у тачки $(2, 0)$. $\left(8\sqrt{3} - \frac{8}{3} - 2\pi\right)$
174. Израчунати површину фигуре омеђане кривом $y^2 = 2x - 1$ и правом $x - y - 1 = 0$. $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$
175. Израчунати површину фигуре омеђане астроидом $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0$. $\left(\frac{3a^2\pi}{8}\right)$
176. Израчунати површину фигуре омеђане лемнискатом $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), a > 0$. (a^2)

Запремина обртног тела

- Декартове координате – $x \in [a, b]$, $y = y(x) \geq 0$: $V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx$
- Декартове координате – $y \in [c, d]$, $x = x(y) \geq 0$: $V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy$
- Параметарски – $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$: $V_x = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t) \dot{x}(t) dt$
- Поларне координате – $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$: $V_x = \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi$

Задаци

177. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре омеђане кривама $y = x^2$ и $y^2 = x$ око x -осе. $\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

178. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре омеђане кривом $y = 2x - x^2$ и одсечком $[0, 2]$ x -осе, око y -осе. $\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

179. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре омеђане кривом $y = \sin x$ и одсечком $[0, \pi]$ x -осе, око y -осе. $(2\pi^2)$

180. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре

$$\Phi = \{(x, y) : y \leq -x^2, x^2 - 1 \leq y\},$$

око x -осе. $\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}\right)$

181. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре омеђане правама $x = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$, $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$, $y = 0$ и кривом $y = \frac{\operatorname{ctg} x \sqrt{\ln(\operatorname{ctg} x)}}{\sin x}$, око x -осе.

$$\left(\pi \left(\sqrt{3} \ln \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \ln \sqrt{2} - \frac{1}{9} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\right)\right)$$

182. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре омеђане астроидом $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ($a > 0$) око x -осе. $\left(\frac{32\pi}{105} a^3\right)$

183. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре омеђане једним сводом циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t < 2\pi$ ($a > 0$) и x -осом, око x -осе. $(5a^3\pi^2)$
184. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом кардиоиде $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$), око x -осе. $\left(\frac{8a^3\pi}{3}\right)$

Дужина лука криве

- Декартове координате – $x \in [a, b]$, $y = y(x)$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$
- Декартове координате – $y \in [c, d]$, $x = x(y)$: $L = \int_c^d \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy$
- Параметарски – $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$
- Поларне координате – $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2} d\varphi$

Задаци

185. Израчунати дужину лука криве $y = x^2$ од тачке $(0, 0)$ до тачке $(1, 1)$. $\left(\frac{1}{4} \left(2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})\right)\right)$
186. Применом одређеног интеграла израчунати обим круга полупречника r . $(2r\pi)$
187. Израчунати дужину лука астроице $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$. $(6a)$
188. Израчунати дужину лука циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$. $(8a)$
189. Израчунати дужину лука кардиоиде $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$. $(16a)$

Површина обртне површи

- Декартове координате – $x \in [a, b]$, $y = y(x)$: $P_x = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$
- Декартове координате – $y \in [c, d]$, $x = x(y)$: $P_y = 2\pi \int_c^d |x(y)| \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy$
- Параметарски – $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$: $P_x = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$
- Параметарски – $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$: $P_y = 2\pi \int_\alpha^\beta |x(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$
- Поларне координате – $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$:
 $P_x = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho |\sin \varphi| \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2} d\varphi$
- Поларне координате – $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$:
 $P_y = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho |\cos \varphi| \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2} d\varphi$

Задаци

190. Применом одређеног интеграла израчунати површину сфере полупречника R . $(4R^2\pi)$
191. Израчунати површину површи која се добија ротацијом криве $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ око y -осе. $(4\pi^2)$
192. Израчунати површину површи која настаје ротацијом астроиде $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, око x -осе. $\left(\frac{12a^2\pi}{5}\right)$
193. Израчунати површину површи која настаје ротацијом кардиоиде $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$, око x -осе. $\left(\frac{128a^2\pi}{5}\right)$
194. Израчунати површину површи која настаје ротацијом лемнискате $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$, око x -осе. $\left(2a^2\pi(2 - \sqrt{2})\right)$