3. колоквијум из Математике 3 (смене 4, 5 и 6) 21.1.2015.

Група 1 - решења

1. Израчунати

$$\iiint\limits_T x dx dy dz,$$

где је

$$T = \left\{(x,y,z):\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 16,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \ge 0,\ x \le y\right\}.$$

<u>Решење</u>. Након увођења сферних координата

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta,$$

тело T се трансформише у тело

$$\begin{aligned} U &= \big\{(\rho,\varphi,\theta):\ 1 \le \rho^2 \le 16,\ \rho\sin\theta\cos\varphi \le 0,\ \rho\sin\theta\sin\varphi \le 0, \\ &\qquad \rho\cos\theta \ge 0,\ \rho\sin\theta\cos\varphi \le \rho\sin\theta\sin\varphi\big\}, \end{aligned}$$

односно, ако искористимо $\rho > 0$ и $\sin\theta > 0$ (јер је $0 < \theta < \pi$), имамо

$$U = \{(\rho,\varphi,\theta):\ 1 \le \rho \le 4,\ \cos\varphi \le 0,\ \sin\varphi \le 0,\ \cos\theta \ge 0,\ \cos\varphi \le \sin\varphi\},$$

одакле добијамо границе

$$\rho\,\big|_1^4,\ \varphi\,\big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}},\ \theta\,\big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Одговарајући јакобијан је

$$J = \rho^2\sin\theta.$$

Даље је

$$\begin{aligned} \iiint\limits_T x dx dy dz &= \iiint\limits_U \rho\sin\theta\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho \\ &= \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\cos\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta\int_1^4\rho^3 d\rho \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{255}{4} = -\frac{255\pi\sqrt{2}}{32}. \end{aligned}$$

2. Израчунати

$$\iint\limits_{\Gamma} (1+z)dS,$$

где је Γ коначни део површи $z = 2 + \sqrt{x^2+y^2}$ који исеца површ $x^2 + y^2 = y$.

<u>Решење</u>. Из једначине конуса $z = 2+\sqrt{x^2+y^2}$ следи $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, па је након сређивања

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy.$$

Даље је

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{\Gamma} (1+z)dS = \iint\limits_{G} (1+2+\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \sqrt{2} dxdy \\ &= \sqrt{2} \iint\limits_{G} (3 + \sqrt{x^2+y^2}) dxdy, \end{aligned}$$

чиме смо тражени површински интеграл прве врсте свели на двоструки интеграл по области G, при чему G представља пројекцију површи Γ на O_{xy} раван. Заправо, то је област

$$G: \ x^2 + y^2 \le y.$$

Након увођења поларних координата

$$x = \rho\cos\varphi, \ y = \rho\sin\varphi,$$

област G се трансформише у област

$$D: \ \rho^2 \le \rho\sin\varphi,$$

односно, пошто је $\rho > 0$,

$$D: \ \rho \le \sin\varphi.$$

Одавде следи

$$\rho \,\Big|_0^{\sin\varphi}, \ \varphi \,\Big|_0^{\pi}$$

(како је $\rho > 0$ и $\rho \leq \sin\varphi$, то мора бити $\sin\varphi > 0$). Одговарајући јакобијан је

$$J = \rho.$$

Даље имамо

$$\begin{aligned}
I &= \sqrt{2}\iint\limits_D (3+\rho)\cdot\rho d\varphi d\rho = \sqrt{2}\int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sin\varphi}(3\rho+\rho^2)d\rho \\
&= \sqrt{2}\int_0^\pi \left[3\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\sin\varphi} \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{3}{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi + \frac{1}{3}\int_0^\pi (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi\right) \\
&= \cdots = \frac{(27\pi+16)\sqrt{2}}{36}.
\end{aligned}$$

3. Применом Стоксове формуле израчунати циркулацију векторског поља

$$\vec{A} = (z-y, x-z, y-x)$$

дуж линије пресека површи $x^2+y^2=1$ и $x+z=1$, у позитивном смеру посматрано са позитивног дела z-осе ($z > 2015$).
Решење. Тражену циркулацију рачунамо као

$$
\begin{aligned}
L_C(\vec{A}) &= \oint_C (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz = \left\{ \begin{array}{c} \text{Stoksova} \\ \text{formula} \end{array} \right\} \\
&= \iint\limits_{\Gamma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix} \\
&= \iint\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial y}(y-x) - \frac{\partial}{\partial z}(x-z) \right) dydz \\
&\quad\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x}(y-x) - \frac{\partial}{\partial z}(z-y) \right) dzdx \\
&\quad\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-z) - \frac{\partial}{\partial y}(z-y) \right) dxdy \\
&= \iint\limits_{\Gamma} (1+1)\, dydz - (-1-1)\, dzdx + (1+1)\, dxdy \\
&= 2 \iint\limits_{\Gamma} dydz + dzdx + dxdy,
\end{aligned}
$$

где је са C означена елипса која се налази у пресеку цилиндра $x^2+y^2=1$ и равни $x+z=1$, док је Γ површ омеђена елипсом C. Због позитивне оријентације посматрано са позитивног дела z-осе бирамо имплицитни облик једначине $x+z=1$ тако да z има позитиван предзнак:

$$F(x,y,z) = x+z-1 = 0.$$

Одавде је вектор нормале

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (1,0,1),$$

док је јединични вектор нормале

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}.$$

Даље је

$$L_C(\vec{A}) = 2 \iint\limits_{\Gamma} \vec{n}_1 \circ (1,1,1) dS = 2 \iint\limits_{\Gamma} \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} \circ (1,1,1) dS = 2\sqrt{2} \iint\limits_{\Gamma} dS.$$

Из $z = 1 - x$ следи $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, па је

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \sqrt{2}dxdy,$$

одакле следи

$$L_C(\vec{A}) = 2\sqrt{2} \iint\limits_G \sqrt{2}dxdy = 4 \iint\limits_G dxdy = 4P(G),$$

где је G пројекција површи Γ на O_{xy} раван. У овом задатку то је унутрашњост (укључујући и границу) кружнице

$$G: \ x^2 + y^2 \leq 1,$$

па је $P(G)$ површина круга

$$P(G) = 1^2\pi = \pi,$$

одакле следи

$$L_C(\vec{A}) = 4\pi.$$

3. колоквијум из Математике 3 (смене 4, 5 и 6) 21.1.2015.

Група 2 - решења

1. Израчунати

$$\iiint\limits_T y dx dy dz,$$

где је

$$T = \left\{(x, y, z) :\ 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ x \leq 0,\ y \leq 0,\ z \leq 0,\ x \geq y\right\}.$$

Решење. Овај задатак се решава аналогно 1. задатку групе 1. На крају се добија

$$\iiint\limits_T y dx dy dz = -\frac{65\pi\sqrt{2}}{32}.$$

2. Израчунати

$$\iint\limits_\Gamma (1 - z) dS,$$

где је Γ коначни део површи $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ који исеца површ $x^2 + y^2 = x$.

Решење. Овај задатак се решава аналогно 2. задатку групе 1. На крају се добија

$$\iint\limits_\Gamma (1 - z) dS = \frac{(16 - 9\pi)\sqrt{2}}{36}.$$

3. Применом Стоксове формуле израчунати циркулацију векторског поља

$$\vec{A} = (y - z, z - x, x - y)$$

дуж линије пресека површи $x^2 + y^2 = 1$ и $y + z = 1$, у позитивном смеру посматрано са позитивног дела z-осе ($z > 2015$).

Решење. Овај задатак се решава аналогно 3. задатку групе 1. На крају се добија

$$L_C(\vec{A}) = -4\pi.$$