Rešenja III kolokvijuma iz Numeričkih metoda

1. a) Konstrusati Lagrangeov interpolacioni polinom u 30 ekvidistantnih interpolacionih čvorova na intervalu $[1, 10]$, za funkciju $f(x) = (x - 1)^2(x - 5)^2(x - 10)^2 + 1$. Prikazati grafički zavisnost broja značajnih cifara kojom interpolacioni polinom aproksimira funkciju f na intervalu $[1, 10]$.

   b) Koristeći grafik Lebesgueove funkcije, za dati raspored interpolacionih čvorova, dati teorijsku ocenu broja značajnih cifara na intervalu $[1, 10]$. Uporediti teorijske rezultate sa dobijenim eskperimentalnim vrednostima. Objasniti poklapanje koristeći izraz za ocenu greške interpolacije.

   c) Koristeći grafik Lebesguove funkcije oceniti minimalni broj značajnih cifara prilikom interpolacije funkcije $f(x) = (x - 1)^2(x - 5)^2(x - 10)^2 + 1$, na intervalu $[1, 10]$, ako ulazni podaci imaju barem 7 značajnih cifara.

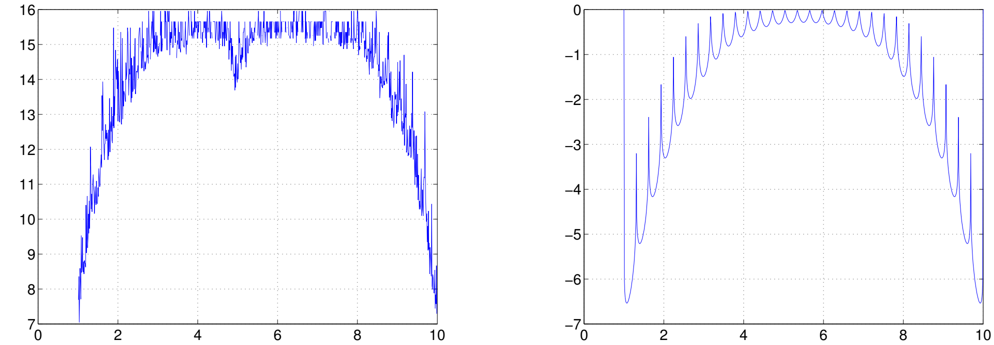
   Rešenje. Koristećemo funkciju iz knjige `lagrangePoly`. a) Grafik dobijamo koristeći sledeću sekvencu naredbi

```
c=linspace(1,10,30);
f=(c-1).^2.*(c-5).^2.*(c-10).^2+1;
x=1:.01:10;
p=lagrangePoly(c,f,x');
f=(x-1).^2.*(x-5).^2.*(x-10).^2+1;
z=-log10(abs((p')./f-1));
plot(x,z);
grid on;
```

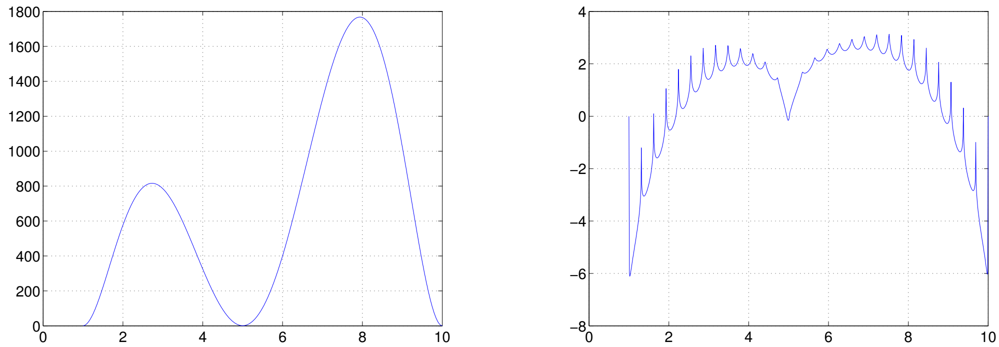
   Dobijamo grafik prikazan levo na slici 1

   Grafik Lebesgueove funkcije, za dati skup čvorova, možemo dobiti na sledeći način

```
c=linspace(1,10,30);
x=1:.01:10;
p=-log10(lebesgueFunction(c,x'));
plot(x,p);
grid on;
```



Slika 1: Levo grafik broja značajnih cifara, desno grafik Lebesgueove funkcije za datu konfiguraciju čvorova.



Slika 2: Slika levo grafik funkcije f, slika desno Lebesgueova funkcija i funkcija f.

Grafik je prikazan na slici 1 desno.

Greška interpolacije može se iskazati na sledeći način

$$|P_{29}(x) - f(x)| \leq \frac{|f^{(30)}(\psi)|}{30!}|\omega(x)| + \epsilon\lambda(x) = \epsilon\lambda(x),$$

gde je ϵ gornja granica apsolutne greške ulaznih podataka. Gornja granica greške ulaznih podataka može biti odredjena na sledeći način. Sve vrednosti funkcije f imaju relativnu grešku približno $r \approx 10^{-16}$. Apsolutna greška u tački x, je $\epsilon(x) \approx r|f(x)|$. Zaključujemo da je gornja granica apsolutne greške

$$\epsilon = \max_{x\in[1,10]} \epsilon(x) \approx r \max_{x\in[1,10]} |f(x)| \approx \frac{941777 + 44408\sqrt{61}}{729} 10^{-16} \approx 1.8 \cdot 10^{-13},$$

jer funkcija f ima maksimum u tački $x = (16 + \sqrt{61})/3$. Grafik funkcije f pikazan je na slici 2 levo.

Koristeći izloženo možemo formirati ocenu

$$-\log_{10} \frac{|P_{29}(x) - f(x)|}{|f(x)|} \geq -\log_{10}\epsilon + \log_{10}|f(x)| - \log_{10}\lambda(x) \approx 13 + \log_{10}|f(x)| - \log_{10}\lambda(x).$$

Na osnovu ovoga možemo dati teorijsku procenu greške interpolacije

```
c=linspace(1,10,30);
x=1:.01:10;
f=(x-1).^2.*(x-5).^2.*(x-10).^2+1;
p=-log10(lebesgueFunction(c,x'));
fCor=-log10(f);
plot(x,p-fCor');
grid on;
```

Grafik je prikazan na slici 2 desno.

Vidimo da je grafik na slici 1 levo, greška interpolacije dobijena eksperimentalno, skoro identičan grafiku na slici 2 desno, koji predstavlja teorijsku ocenu. Jedan se dobija iz drugog translacijom za veličinu ≈ 13.

c) Ako podaci imaju makar 7 značajnih cifara, onda grafik broja značajnih cifara dobijamo transliranjem grafika 2 desno za

$$-\log_{10}(1.8 \cdot 10^{-7}) \approx 6.7$$

Dobićemo otprilike .7 značajanih cifara na krajevima intervala, što predstavlja minimum na intervalu interpolacije.

2. Pretpostavimo da imate na raspolaganju merni uredjaj koji ima gornju granicu relativne greške 10^{-m}, $m \in \mathbb{N}$, i da odmeravate konstantnu funkciju $f(x) = .1$ na intervalu $[0, 5]$ sa korakom odmeravanja $h = .001$.

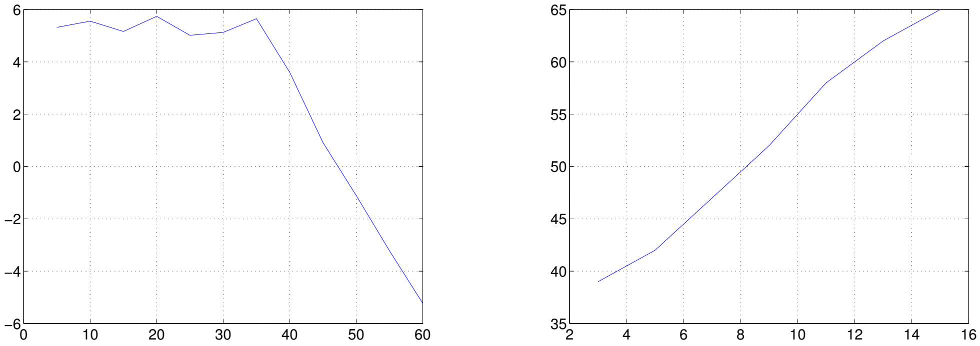
   a) Za $m = 5$, odrediti Newtonov interpolacioni polinom najvišeg stepena n konstruisanog u interpolacionim čvorovima $x_k = 0 + kh$, $k = 0, \ldots, n$, tako da je broj značajnih cifara kojim Newtonov interpolacioni polinom aproksimira funkciju f u tački x_n, bar dva.

   b) Nacrtati zavisnost najvišeg stepena Newtonovog interpolacionog polinoma n, za postizanje bar dve značajne cifre u tački x_n, u funkciji broja značajnih cifara ulaznih podataka m. Objasniti zašto je zavinost linearna.

   Rešenje. Za konstrukciju rešenja koristićemo funkciju iz knjige `newtonPoly`.

   a) Broj značajnih cifara u tački x_n, za polinom stepena n, možemo dobiti sledećom konstrukcijom

```
m=5;
h=.001;
c=0:h:5;
f=.1*(1+10^(-m)*(2*rand(1,length(c))-1));
nN=60;
```



Slika 3: Slika levo, zavisnost broja značajnih cifara u tački x_n Newtonovog interpolacionog polinoma stepena n u funkciji stepena polinoma za $m = 5$, slika desno grafik stepena polinoma u funkciji broja značajnih cifara ulaznih podataka.

m	3	5	7	9	11	13	15
n_m	39	42	47	52	58	62	65

Tabela 1: Stepen polinoma u funkciji broja značajnih cifara u ulaznim podacima.

```
z=[];
for n=5:5:nN
        p=newtonPoly(c(1:(n+1)),f(1:(n+1)),c(n+1));
        z=[z -log10(abs(10*p-1))];
end
plot(5:5:nN,z);
grid on;
```

Grafik je prikazan na slici 3 levo. Sa slike vidimo da je stepen polinoma otprilike 42.

b) Da bismo dobili sliku dovoljno je u prethodnom programu menjati vrednost m, od recimo 3 do 15 sa korakom 2, i nacrtati odgovarajući grafik. Dobijamo vrednosti prikazane u tabeli 1 koje treba prikazati na grafiku.

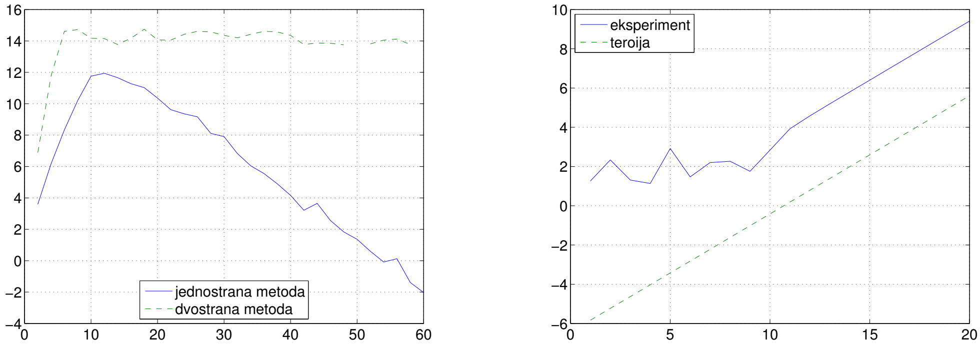
Koristeći podatke iz tabele 1 možemo nacrtati grafik prikazan na slici 3 desno. Vidimo da je zavisnost linearna.

3. a) Nacrtati zavisnost broja značajnih cifara u funkciji stepena tačnosti $n = 2k$, $k = 1, \ldots, 30$, prilikom odredjivanja izvoda funkcije $f(x) = \log x$, u tački $x = 5$, metodama jednostranog i dvostranog diferenciranja, za $h = .1$.

   b) Uporediti dobijene rezultate sa dobijenim teorijskim ocenama. Objasniti razlog velikog odstupanja. Objasniti zašto formula za dvostrano diferenciranje ima broj značajnih cifara koji, sem za mala stepene tačnosti, ne zavisi od stepena tačnosti formule n.

   Rešenje. Koristićemo funkcije iz knjige `izvodDesni` i `izvodDvostrano`.

   a) Grafik možemo dobiti koristeći sledeći skript



Slika 4: Slika levo zavisnost broja značajnih cifara u funkciji stepena tačnsoti formule za metode jednsotranog i dvostranog diferenciranja, slika desno značajne cifre prilikom izračunavanja integrala u četvrtom zadatku.

```
f=@(x) log(x);
h=.1;
x=5;
zJ=[];
zD=[];
for n=2:2:60
    zJ=[zJ -log10(abs(5*izvodDesni(n,h,x,f)-1))];
    zD=[zD -log10(abs(5*izvodDvostrano(n/2,h,x,f)-1))];
end
plot(2:2:60,zJ,'-',2:2:60,zD,'--');
legend('jednostrana metoda', 'dvostrana metoda','location','south');
grid on;
```

Izvršavanjem dobijamo grafik kao na slici 4 levo.

b) Teorijski granica greške je odredjena izrazima

$$\left|\frac{1}{n+1}h^n f^{(n+1)}(\psi)\right| = \frac{1}{n+1}h^n\frac{n!}{\psi^n}, \quad \psi \in (5, 5+nh),$$
$$\left|\frac{(-1)^{n/2}((n/2)!)^2}{(n+1)!}h^n f^{(n+1)}(\psi)\right| = \frac{((n/2)!)^2}{(n+1)!}h^n\frac{n!}{|\psi|^{n+1}}, \quad \psi \in (-5+nh, 5+nh).$$

Odavde možemo dobiti ocene

$$\frac{n!}{n+1}\left(\frac{h}{5}\right)^n, \quad \frac{1}{2}\frac{((n/2)!)^2}{n+1}\left(\frac{h}{2}\right)^n.$$

Za male vrednosti n ove formule daju jako male apsolutne greške. Do velikog odstupanja dolazi jer ocene grešaka koje daju ove formule jesu približno tačne pod uslovom da se izračunavanja izvode sa apsolutno tačnim mantisama. Vidimo da ako izaberemo dovoljnu veliku vrednost za n, pri čemu vrednost h držimo fiksnom, da greška može biti po volji velika. Koristeći Stirlingovu formulu za aproksimaciju faktorijela, možemo pisati

$$\frac{\sqrt{2\pi n}}{n+1}\left(\frac{nh}{5e}\right)^n, \quad \frac{2\pi n}{2(n+1)}\left(\frac{nh}{4e}\right)^n.$$

Formula za dvostrano diferenciranje ne gubi tačnost tokom povećanja stepena tačnsoti formule jer se akumirana greška prilikom izračunavanja konačnih razlika množi koeficijentima formule koji znatno brže opadaju u odnosu na formulu za jednostrano diferenciranje.

4. Koristeći uopštenu trapeznu formulu za izračunavanje integrala

$$\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{\sin(1000\pi\log(2+x)/\log(3))}{2+x}\right)dx = 2,$$

nacrtati zavinost broja značajnih cifara u funkciji logaritma broja podintervala $N = 2^k$, $k = 1,\dots,20$. Uporediti dobijene rezultate sa teorijskom ocenom. Pokazati da je priraštaj značajnih cifara prilikom povećanja broja podintervala za dva puta isti i na osnovu dobijenih rezultata eksperimentom i teorijski. Objasniti zašto teorijska ocena daje manji broj značajnih cifara od broja značajnih cifara dobijenih eksperimentom za isti broj podintervala.

Rešenje. Za izračunavanje integrala korišćenjem uopštene trapezne formule možemo iskoristiti funkciju `uopstenNewtonCotes`.

Označimo $a = 1000\pi/\log(3)$. Koristeći izraz za grešku uopštene trapezne formule možemo pisati

$$R_n = -\frac{2}{3N^2}f''(\psi) = \frac{2}{3N^2}\frac{3a\cos(a\log(2+\psi) + a^2\sin(a\log(2+\psi)) - 2\sin(a\log(2+\psi))}{(2+\psi)^3}, \quad \psi \in (-1,$$

Vodeći član u zbiru je drugi i to za mnogo redova veličine, tako da možemo uzeti da je

$$|R_n| \approx \frac{2a^2}{3N^2}\max_{x\in(-1,1)}\frac{|\sin(a\log(2+x))|}{(2+x)^3} \le \frac{2a^2}{3N^2}.$$

Ovde smo izvršili prilično grubu aproksimaciju $\sin(a\log(2+\psi))/(2+\psi)^3 \approx 1$, ova aproksimacija dovodi do pesimistične ocene broja značajnih cifara. Medjutim, u suštini, sa teorijskom ocenom formule ne možemo ništa značajnije da uradimo.

Program koji crta grafik od interesa može biti sledeći

```
f=@(x) (1+sin(1000*pi*log(2+x)/log(3))/(2+x));
a=1000*pi/log(3);
z=[];
zT=[];
for k=1:20
    z=[z -log10(abs(uopstenNewtonCotes(2^k,1,-1,1,f)/2-1))];
```

```
    zT=[zT -log10(abs(a^2/3*2^(-2*k)))];
end
plot(1:20,z,'-',1:20,zT,'--');
legend('eksperiment','teroija','location','northwest');
grid on;
```

Grafik koji dobijamo je prikazan na slici 4 desno. Kad je broj intervala dovoljno veliki, veći od 2^{10}, i eksperiment i teorijska ocena imaju isti nagib. Drugim rečima, iskazuju isti prinos značajnih cifara sa povećanjem broja podintervala. Medjutim, prilikom odredjivanja teorijske ocene mi koristimo prilično grubu aproksimaciju jer ne možemo odrediti ψ za koju bismo izvršili izračunavanja. Ovo je uzrok velikog odstupanja (više od dve značajne cifre) rezultata dobijenih eksperimentom i teorijom.

Sa slike vidimo da dobijamo da dobijamo otrpilike 3.1 značajnih cifara ako broj intervala povećamo 2^5 puta. Ovo možemo objasniti koristeći recimo teorijsku ocenu, jer je

$$-\log_{10}\frac{a^2}{3(2^5N)^2} = -\log_{10}\frac{a^2}{3N^2} + 10\log_{10}2 \approx -\log_{10}\frac{a^2}{3N^2} + 3.$$

5. a) Naći egzaktno rešenje Chauchyevog problema

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 1.$$

b) Napisati funkcije u `Matlabu` koje aproksimiraju rešenje Cauchyevog problema, koristeći Eulerov metod

$$y_{n+1} = y_n + hf_k, \quad y_0 = y(0),$$

i Adams-Bashforthov metod

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n), \quad y_0 = y(0), \quad y_1 \approx 1 + h^2 + \frac{h^4}{2}, \quad y_2 \approx 1 + 4h^2 + 8h^4.$$

c) Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara aproksimacije rešenja $y(1)$ u funkciji logaritma koraka $h = 2^{-k}$, $k = 1, \ldots, 15$. Oceniti na osnovu grafika red Adams-Bashforthovog metoda.

d) Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara rešenja Cauchyevog problema, prilikom izračunavanja Adams-Bashforthovim metodom, na intervalu $[0, 1]$ za $h = 2^{-10}$. Objasniti oblik krive.

Rešenje. a) Diferencijalna jednačina razdvaja promenljive.

$$y' = 2xy, \quad \frac{dy}{y} = 2xdx, \quad \log|y| = x^2 + C, \quad y = Ce^{x^2}, \quad y = e^{x^2}.$$

b) Eulerova metoda je implementirana u funkciji `eulerMethod`. Adams-Bashfortovu metodu možemo implementirati koristeći implementaciju funkcije za Eulerov metod.

```
function y = ab( x0, y0, b, h, fun )
      y=[]; y = [y y0]; x=x0+2*h;
      while(x<b)
            y = [y y(end)+h/12*(23*fun(x,y(end))-16*fun(x-h,y(end-1))+...
                  5*fun(x-2*h,y(end-2)))];
            x=x+h;
      end
end
```

c) Za konstrukciju grafika možemo koristiti sledeći skript

```
f=@(x,y) (2*x*y);
xn=1;x0=0;
z=[];
for k=1:15
      h=2^(-k);
      y0=[1 1+h^2+h^4/2 1+(2*h)^2+(2*h)^4/2];
      y=ab(x0,y0,xn,h,f);
      z=[z -log10(abs(y(end)*exp(-1)-1))];
end
plot(1:15,z);
grid on;
```

Grafik koji dobijamo je prikazan na slici 5 levo. Greška Adams-Bashfortovog metoda, reda p, ima formu

$$Ch^p.$$

Zaključujemo da je broj značajnih cifara odredjen sa

$$-\log_{10}(Ch^p).$$

Ako korak smanjimo 2^k puta, broj značajnih cifara se povećava

$$-\log_{10}\left(C\left(\frac{h}{2^k}\right)^p\right) = kp\log_{10}2 - \log_{10}(Ch^p) \approx .3kp - \log_{10}(Ch^p).$$

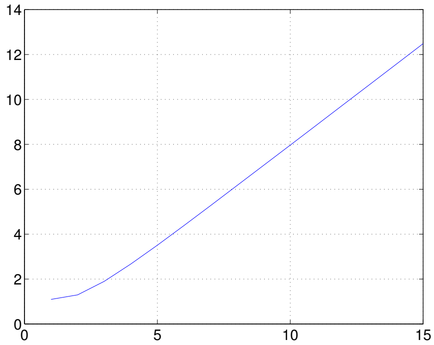
približno $.3kp$ puta. Sa slike vidimo da broj značajnih cifara za $h = 2^{-10}$ iznosi 8, a za $h = 2^{-15}$ iznosi 12.5. Dobijamo

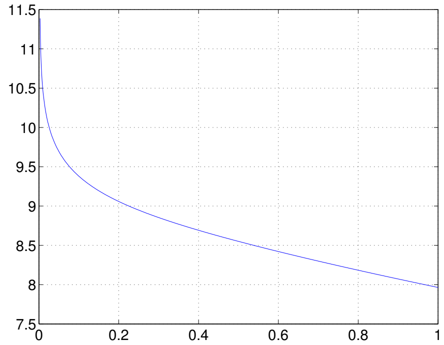
$$p \approx \frac{12.5-8}{.3\cdot 5} = 3$$

Zaključujemo da je red metoda tri.

d) Skript koji generiše zahtevani grafik je recimo seldeći

```
f=@(x,y) (2*x*y);
```





Slika 5: Slika levo prikazuje broj značajnih cifara u funkciji $-\log_2 h$, slika desno odredjuje broj značajnih cifara u intervalu integracije.

```
xn=1;x0=0;h=2^(-10);
y0=[1 1+h^2+h^4/2 1+(2*h)^2+(2*h)^4/2];
y=ab(x0,y0,xn,h,f);
x=x0:h:xn;
plot(x,-log10(abs(y.*exp(-x.*x)-1)));
grid on;
```

Grafik je prikazan na slici 5 desno. Oblik grafika funkcije se donekle može shvatiti ako iskoristimo izraz za grešku

$$Ch^3(x_n - x_0).$$

Oblik krive ima otprilike oblik logaritmske krive, što dobijamo i ako pokušamo da odredimo broj značajnih cifara iz izraza za grešku.