Treći kolokvijum iz Matematike 3, grupa I

1. Koristeći Stoksovu formulu odrediti cirkulaciju vektorskog polja $\vec{F} = (x, 0, y - z)$, duž krive C koja je odredjena presekom sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i ravni $2x - y = 1$. Kriva C ima pozitivnu orijentaciju gledano sa vrha y ose.

   Rešenje. Za unutrašnjost krive C je najbolje uzeti površ S onog dela ravni koja pripada sferi. Vektor normale na površ je odredjen sa $\vec{n} = (2, -1, 0)$ dok je intenzitet vektora normale $|\vec{n}| = \sqrt{5}$. Primetimo da vektor normale gradi negativan ugao sa y osom, a nama je orjentacija pozitivna gledanos a vrha y ose. Potrebna nam je normala $\vec{n} = (-2, 1, 0)$. Nalazimo

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F})\, d\vec{S} = \iint_S \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & 0 & y - z \end{vmatrix} \begin{bmatrix} dydz \\ dxdz \\ dxdy \end{bmatrix} = \iint_S dydz = -\iint_{D_{yz}} dydz.$$

   Projekcija krive C na ravan yz se dobija eleminacijom x iz sistema. Dobijamo

$$D_{yz}: \quad \left(\frac{1+y}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 5y^2 + 2y + 4z^2 = 3, \quad \left(\sqrt{5}y + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + (2z)^2 = \frac{14}{5}.$$

   Prelaskom na polarne koordinate

$$y = \frac{1}{5}\left(\sqrt{14} r \cos\varphi - 1\right), \quad z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{5}} r \sin\varphi.$$

   Jacobian iznosi

$$J = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{array} \right\| = \frac{7}{5\sqrt{5}} r.$$

   Dobijamo

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = \frac{7}{5\sqrt{5}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 r dr = \frac{7\pi}{5\sqrt{5}}.$$

2. Odrediti fluks vektorskog polja $\vec{F} = (xe^x, -1, 1)$ po spoljnoj strani površi sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Zadatak rešiti primenom teoreme Gauss-Ostrogradskog i direktnim izračunavanjem površinskog integrala .

   Rešenje. Primenom formule Gauss-Ostrogradskog nalazimo

$$\oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \vec{F}) dV = \iiint_V (1 + x) e^x dV.$$

   Prelaskom na sferne koordinate u formi

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi\sin\theta,$$

   nalazimo

$$\oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{\pi} (1 + r\cos\theta) e^{r\cos\theta} r \sin\theta d\theta = 2\pi \int_0^1 r dr \int_{-r}^{r} (1 + t) e^t dt$$
$$= 2\pi \int_0^1 r^2 dr (e^r + e^{-r}) = 2\pi \left(e - \frac{5}{e}\right).$$

Drugi način je integracija površinskog integrala. Kako je spoljna normala na površ sfrere

$$\vec{n} = (x, y, z), \quad |\vec{n}| = 1,$$

nalazimo

$$\oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \oiint_S (xe^x, -1, 1)^T (x, y, z) dS = \oiint_S (x^2 e^x - y + z) dS$$

Sada je najednostvnije uvesti parametarske jednačine sfere na sledeći način

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \cos\varphi \sin\theta.$$

Intenzitet vektora normale iznosi $|\vec{n}| = \sin\theta$. Dobijamo

$$\begin{aligned}\oiint_S \vec{F} d\vec{S} &= \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi (\cos^2\theta e^{\cos\theta} - \sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\sin\theta) \\ &= 2\pi \int_0^\pi \cos^2\theta e^{\cos\theta} \sin\theta d\theta = 2\pi \int_{-1}^{1} t^2 e^t dt = 2\pi \left(e - \frac{5}{e}\right).\end{aligned}$$

3. Odrediti vrednost izraza

$$\iint_S x\, dS,$$

gde je S deo površi $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$ oivičen ravnima $x = 2$ i $x = 3$.

Rešenje. Vektor normale na ravan iznosi $\vec{n} = (-x, y, z)$. Vidimo da je uslov jednoznačnosti zadovoljen ako površ projektujemo na yz rava. Površ se projektuje na križni prsten $2 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq 3$. Dobijamo

$$\iint_S x dS = \iint_{Dyz} x \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x} dydz = \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_2^3 r^2 dr = \frac{38\pi}{3}\sqrt{2}.$$

Treći kolokvijum iz Matematike 3, grupa 2

1. Koristeći Stoksovu formulu odrediti cirkulaciju vektorskog polja $\vec{F} = (y - x, 0, z)$, duž krive C koja je odredjena presekom sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i ravni $-y + 2z = 1$. Kriva C ima pozitivnu orijentaciju gledano sa vrha y ose.

   Rešenje. Koristeći iste postupke kao u prvom zadatku prve grupe, nalazimo da je

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_S (0,0,-1)^T d\vec{S} = -\iint_S dxdy = \iint_{D_{xy}} dxdy.$$

   Oblast na koju se projektuje površ S se odredjuje eliminacijom z iz sistema. Dobijamo

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{1+y}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 + 5y^2 + 2y = 3 \Rightarrow (2x)^2 + \left(\sqrt{5}y + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{14}{5}.$$

   Najjednostavnije je oblast parametrizovati upotrebom polarnih koordinata

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{5}} r\cos\varphi, \quad y = \frac{\sqrt{14}}{5} r\sin\varphi - \frac{1}{5}.$$

   Jacobian iznosi

$$J = \frac{7}{5\sqrt{5}} r.$$

   Nalazimo

$$\iint_{D_{xy}} dxdy = \frac{7}{10\sqrt{5}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \int_0^1 rdr = \frac{7\pi}{5\sqrt{5}}.$$

2. Odrediti fluks vektorskog polja $\vec{F} = (-1, ye^y, 1)$ po spoljnoj strani površi sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Zadatak rešiti primenom teoreme Gauss-Ostrogradskog i direktnim izračunavanjem površinskog integrala.

   Rešenje. Ako iskoristimo teoremu Gauss-Ostrogradskog nalazimo

$$\oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_V (\nabla F) dV = \iiint (1+y)e^y dV = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_0^{\pi} (1 + r\cos\theta) e^{r\cos\theta} r\sin\theta d\theta$$
$$= 2\pi \int_0^1 rdr \int_{-r}^{r} (1+t)e^t dt = \pi\left(e - \frac{5}{e}\right),$$

   gde smo koristili polarne koordinate u formi $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\varphi\sin\theta$.

   Direktnim izračanavanjem nalazimo

$$\oiint_S \vec{F} d\vec{S} = \oiint_S (-x + y^2 e^y + z) dS = \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi (\cos\varphi\sin\theta + \cos^2\theta e^{\cos\theta} + \sin\varphi\sin\theta)$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\theta e^{\cos\theta} \sin\theta d\theta = 2\pi \int_{-1}^{1} t^2 e^t dt = \pi\left(e - \frac{5}{e}\right),$$

   gde smo koristli parametrizaciju sfere $x = \cos\varphi$, $y = \cos\theta$, $z = \sin\varphi\sin\theta$.

3. Odrediti vrednost izraza

$$\iint_S y\, dS,$$

gde je S deo površi $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ oivičen ravnima $y = 2$ i $y = 3$.

Rešenje. Naajjednostavnije je zadatak rešiti paramtrrizacijom površi $x = u\cos v$, $y = u$, $z = u\sin v$. Granice parametara su $u \in [2,3]$, $v \in (-\pi, \pi)$. Intenzitet vektora normale u parametarskom koordiantnom sistemu iznosi (videti materijal sa časa)

$$|r_u \times r_v| = u\sqrt{2}.$$

Dobijamo

$$\int_S ydS = \sqrt{2}\int_{D_{uv}} u^2 dudv = 2\pi\sqrt{2}\int_2^3 u^2 du = \frac{38\pi}{3}\sqrt{2}.$$

Napomena:
Potpisati ovaj papir i predati ga sa rešenjem zadataka.

KATEDRA ZA MATEMATIKU