MEHANIKA

Mehanika je nauka koja proučava opšte zakone mehaničkih kretanja i ravnoteže mehaničkih objekata.

Pod mehaničkim kretanjem podrazumeva se promena položaja (pomeranje) jednog mehaničkog objekta (telo, tačka) u odnosu na drugi (osnovni, referentni) u toku vremena.

Teorijska mehanika se obično deli na statiku, kinematiku i dinamiku.

Osnovni pojmovi u mehanici su: tačka, prava, ravan (prostor preuzet iz geometrije), vreme, masa i sila.

Kinematika je deo klasične (njutnovske) mehanike koja proučava kretanja mehaničkih objekata, ne uzimajući u obzir njihovu materijalnost, kao ni uzroke koji uslovljavaju ta kretanja. Za razliku od statike, u kinematici se pojam sile ne koristi, a uvodi se pojam vremena. Sa matematičke tačke gledišta, vreme je parametar i može uzimati vrednosti u intervalu od $-\infty$ do $+\infty$. Sa stanovišta teorijske mehanike, vreme t ima konkretan fizički smisao i može uzimati vrednosti u intervalu $0 \le t < \infty$. Trenutak od koga počinje da se meri vreme naziva se <u>početni trenutak</u> t_o. Vreme koje protekne od početnog trenutka definiše određeni <u>trenutak *t*</u>. Ako su sa t_1 i t_2 označeni određeni trenuci, pri čemu je $t_2 > t_1$, tada se <u>interval vremena *T*</u> definiše kao

$$T = t_2 - t_1 .$$

Osnovna jedinica za merenje dužine, je <u>metar (*m*)</u>. Osnovna jedinica za merenje vremena je <u>sekunda (*s*)</u>.

Dinamika proučava kretanje mehaničkih objekata uzimajući u obzir njihovu materijalnost kao i uzroke koji izazivaju to kretanje. Pored svih navedenih pojmova u statici i kinematici, u dinamici se uvodi i novi pojam mase.

Umesto razmatranja realnih tela, u mehanici se najčešće proučavaju uprošćeni modeli stvarnih objekata. Najčešće korišćeni modeli su: materijalna tačka i kruto telo.

Geometrijska tačka koja može da se smatra zastupnikom celog tela, zadržavajući bitna svojstva tela koje zastupa, naziva se materijalna tačka. Ili kratko, materijalna tačka je geometrijska tačka kojoj se pridodaje masa.

Kruto telo je materijalno telo koje ne menja svoj geometrijski oblik i zapreminu (ne deformiše se) pri dejstvu drugih tela.

Koordinatni sistemi ili sistemi referencije su geometrijski objekti u odnosu na koje se određuju položaji objekata u prostoru. Kretanje tela u odnosu na apsolutno nepokretni koordinatni sistem naziva se apsolutno kretanje. Kretanje tela u odnosu na pokretan koordinatni sistem naziva se relativno kretanje.

Osnovni zadaci kinematike

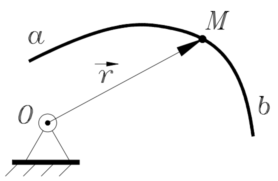
- određivanje kretanja posmatranog objekta u odnosu na izabrano osnovno telo, odnosno određivanje jednačina kretanja;
- polazeći od jednačina kretanja posmatranog objekta, koje su ili zadate ili određene, cilj drugog (osnovnog) zadatka kinematike je određivanje karakteristika posmatranog kretanja, kao što su: trajektorija, brzina, ubrzanje itd.

Kinematika tačke

Načini određivanja kretanja tačke

- vektorski,
- analitički (koordinatni)
- prirodni

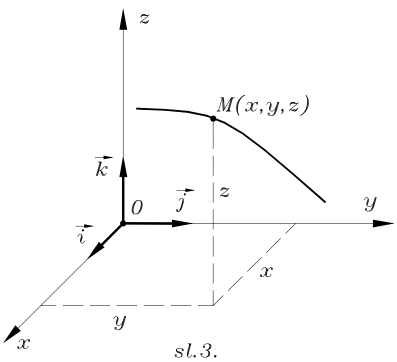
Vektorski način određivanja kretanja tačke



$\vec{r} = \vec{r}(t)$ - zakon kretanja tačke u vektorskom obliku

Analitički (koordinatni) način određivanja kretanja tačke

a. Dekartove pravougle koordinate



sl.3.

Uređeni skup koordinata posmatrane tačke (x,y,z) koje su jednoznačne, neprekidne i najmanje dva puta diferencijabilne funkcije vremena

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, su

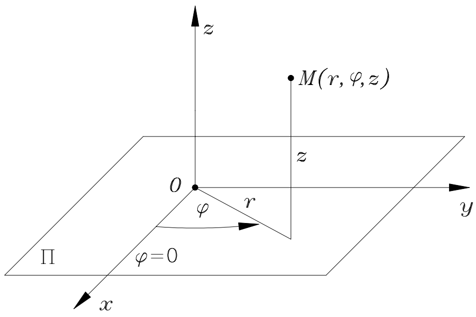
- konačne jednačine kretanja tačke;
- kinematičke jednačine kretanja tačke;
- parametarske jednačine kretanja tačke;
- parametarske jednačine linije putanje tačke.

$x = x[f(z)]$, $y = y[f(z)]$ - linija putanje tačke

Deo linije putanje koji odgovara uslovu $t \geq 0$ naziva se trajektorija.

b. Polarno – cilindarske koordinate

Položaj tačke *M*, u odnosu na polarno-cilindarski koordinatni sistem određen je skupom koordinata (r,φ,z), koje se nazivaju polarni poteg, polarni ugao i aplikata, respektivno.



$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t)$$

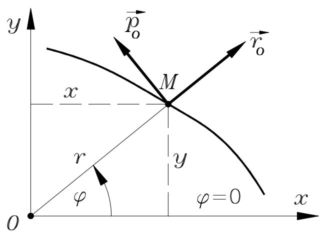
Ove tri funkcionalne zavisnosti nazivaju se konačne jednačine kretanja tačke u polarno–cilindarskim koordinatama. Dekartove koordinate tačke preko polarno-cilindarskih koordinata iste tačke izražene su kao

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Korišćenjem ovih relacija moguće je izraziti polarno–cilindarske koordinate tačke preko Dekartovih pravouglih koordinata iste tačke, tj.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg\frac{y}{x}, \quad z = z.$$

- Polarne koordinate



$r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ - konačne jednačine kretanja tačke u polarnim koordinatama

Veze između Dekartovih i polarnih koordinata tačke su

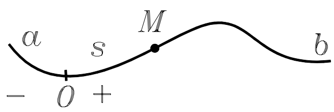
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Polarne koordinate tačke mogu se izraziti preko Dekartovih koordinata iste tačke kao

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg\frac{y}{x}.$$

Prirodni način određivanja kretanja tačke

Neka je putanja uočene tačke *M* kriva *ab*. Da bi se odredio položaj tačke *M* u prostoru, usvaja se putanja tačke *ab* za krivolinijsku koordinatnu liniju, bira koordinatni početak *O* odakle se meri odgovarajuća krivolinijska (lučna) koordinata *s* i vrši orijentacija te lučne koordinate.



Položaj tačke *M* tada je jednoznačno određen lučnom koordinatom

$$s = \overset{\frown}{OM}.$$

tj. $s = f(t)$. Ova jednačina predstavlja zakon kretanja tačke po putanji.

Za prirodni način određivanja kretanja potrebno imati sledeće podatke:

- putanju,
- koordinatni početak na putanji,
- orijentaciju krivolinijske (lučne) koordinate i
- zakon kretanja tačke po putanji.

Pri izračunavanju pređenog puta tačke u nekom intervalu vremena od t_1 do t_2, ceo interval vremena se rastavlja na manje intervale Δt_i u kojima tačka ne menja smer kretanja. Neka su u tom slučaju odgovarajuće promene lučne koordinate u vremenskim intervalima Δt_i označene sa Δs_i. Ukupan pređeni put S tačke je uvek pozitivan i određuje se kao

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta s_i\right|.$$

Primenom graničnog procesa, kod koga svi priraštaji Δs_i teže nuli, dobija se

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta s_i\right| = \int_{t_1}^{t_2} \left|ds\right|.$$

Kako je

$$ds = \dot{f}(t)dt.$$

sledi da je pređeni put tačke monotono rastuća funkcija vremena, tj.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left|\dot{f}(t)\right|dt.$$

Veze između različitih načina određivanja kretanja tačke

Neka je zakon kretanja tačke dat u vektorskom obliku

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

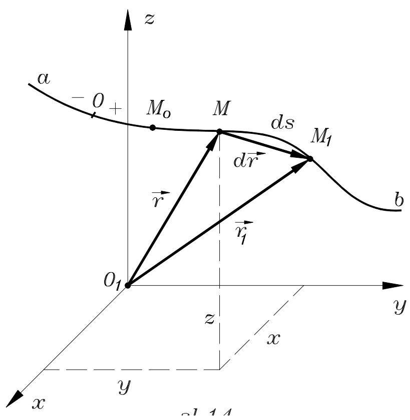
U odnosu na Dekartov koordinatni sistem, vektor položaja $\vec{r}$ može se razložiti na sledeći način

$$\vec{r} = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k},$$

odnosno

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Na osnovu koordinatnih transformacija poznato je i kretanje tačke u odnosu na polarno – cilindarski koordinatni sistem.



Ako su zadate jednačine kretanja tačke u Dekartovim koordinatama, tada je poznata i trajektorija *ab*. Pokazuje se da je tada moguće odrediti i zakon kretanja tačke po trajektoriji čime se uspostavlja veza između prirodnog i koordinatnog načina zadavanja kretanja. U tom cilju bira se koordinatni početak na putanji i orijentiše se krivolinijska (lučna) koordinata *s*. Neka se uočena tačka *M* u izabranom početnom trenutku t_o nalazi u položaju $x_o = x(t_o)$, $y_o = y(t_o)$, $z_o = z(t_o)$, odnosno $M_o(x_o, y_o, z_o)$. Uočavaju se zatim, dva trenutka vremena koja se razlikuju za elementarni (veoma mali) priraštaj vremena *dt*: trenutak *t*, kada se uočena tačka našla u položaju *M* koji je određen vektorom položaja $\vec{r}$, kao i lučnom koordinatom $s = \overset{\frown}{OM}$ i trenutak vremena $t_1 = t + dt$, kada se tačka našla u položaju M_1, koji je određen vektorom položaja $\vec{r}_1 = \vec{r} + d\vec{r}$ kao i lučnom koordinatom $s_1 = \overset{\frown}{OM_1} = s + ds$. Tada je

$$ds^2 = dr^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} \, ,$$
$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \, ,$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \, ,$$
$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \, ,$$
$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \dot{x}dt \, , \qquad dy = \dot{y}dt \, , \qquad dz = \dot{z}dt \, ,$$
$$ds = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt \, ,$$
$$s = s_o \pm \int_{t_o}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt \, .$$

Prethodne relacije pokazuju kako se može ostvariti prelazak sa koordinatnog na prirodni način zadavanja kretanja tačke i omogućavaju dobijanje veze između prirodnog i bilo kog drugog koordinatnog načina zadavanja kretanja tačke. Na primer, korišćenjem veze između Dekartovih i polarnih koordinata dobija se

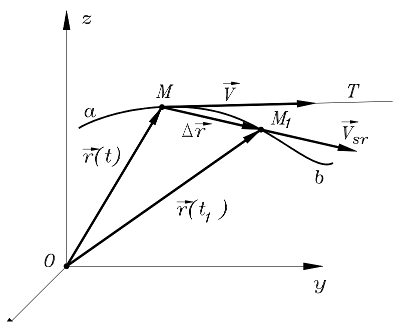
$$\dot{x} = \dot{r}cos\varphi - rsin\varphi\dot{\varphi} \, , \qquad \dot{y} = \dot{r}sin\varphi + rcos\varphi\dot{\varphi}$$

Tada je

$$s = s_o \pm \int_{t_o}^{t} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\,dt \, .$$

Brzina tačke

Vektorski način određivanja brzine tačke



Neka je kretanje posmatrane tačke M dato u vektorskom obliku i neka je putanja tačke kriva *ab*. Uočavaju se dva bliska položaja posmatrane tačke: položaj tačke M određen vektorom $\vec{r}(t)$ u kome se tačka nađe u trenutku t i položaj tačke koji je određen vektorom položaja $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$ u kome se tačka nađe u trenutku $t_1 = t + \Delta t$. Odnos priraštaja vektora položaja (vektora pomeranja) $\Delta\vec{r}$ i njemu odgovarajućeg priraštaja vremena (intervala vremena) Δt naziva se srednja brzina tačke za posmatrani interval vremena Δt, tj.

$$\vec{V}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t)}{t_1 - t} \, .$$

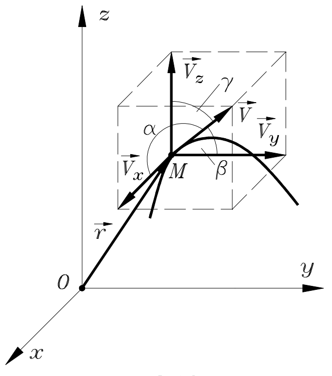
Graničnim prelazom, kada se Δt smanjuje i teži nuli, vektor $\vec{V}_{sr}$ teži nekoj konačnoj vrednosti, koja je takođe vektor, i naziva se brzina tačke u datom trenutku (trenutna brzina), odnosno

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to o} \vec{V}_{sr} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \, .$$

Vektor brzine tačke u datom trenutku jednak je prvom izvodu vektora položaja te tačke po vremenu. Vektor brzine $\vec{V}$ je pravca tangente na putanju u posmatranoj tački *M*, a smer je onaj u kome se tačka kreće.
Jedinica, kojom se izražava intenzitet brzine tačke je odnos jedinice dužine i vremenske jedinice, tj. ms^{-1}.

Analitički (koordinatni) način određivanja brzine tačke

a. Određivanje brzine tačke u Dekartovim koordinatama



$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z,$$

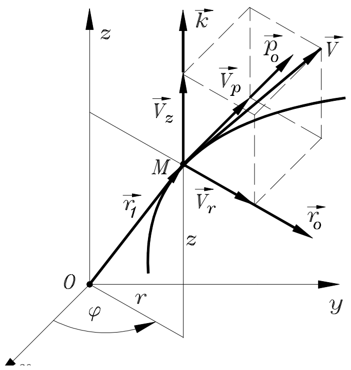
$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k},$$

$$V_x = \dot{x}, \qquad V_y = \dot{y}, \qquad V_z = \dot{z},$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

$$cos\alpha = \frac{\dot{x}}{V}, \qquad cos\beta = \frac{\dot{y}}{V}, \qquad cos\gamma = \frac{\dot{z}}{V}.$$

Određivanje brzine tačke u polarno–cilindarskim koordinatama



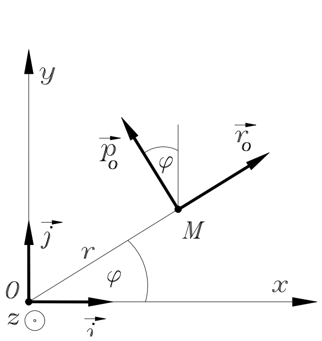
$$\vec{r}_1 = r\vec{r}_o + z\vec{k},$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \dot{r}\vec{r}_o + r\dot{\vec{r}}_o + \dot{z}\vec{k}.$$

Za određivanje izvoda po vremenu jediničnih vektora $\vec{r}_o$ i $\vec{p}_o$, oni se mogu izraziti preko konstantnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ kao

$$\vec{r}_o = r_o cos\varphi\, \vec{i} + r_o sin\varphi\, \vec{j},$$

$$\vec{p}_o = -p_o\, sin\varphi\, \vec{i} + p_o\, cos\varphi\, \vec{j}.$$



Uzimajući u obzir da važi $r_o = p_o = 1$, iz izraza izvodi po vremenu jediničnih vektora su

$$\dot{\vec{r}}_o = \frac{d\vec{r}_o}{d\varphi}\dot{\varphi} = (-sin\varphi\, \vec{i} + cos\varphi\, \vec{j})\dot{\varphi},$$

$$\dot{\vec{p}}_o = \frac{d\vec{p}_o}{d\varphi}\dot{\varphi} = -(cos\varphi\, \vec{i} + sin\varphi\, \vec{j})\dot{\varphi}.$$

$$\dot{\vec{r}}_o = \dot{\varphi}\, \vec{p}_o, \qquad \dot{\vec{p}}_o = -\dot{\varphi}\, \vec{r}_o.$$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{r}_o + r\dot{\varphi}\vec{p}_o + \dot{z}\vec{k} \,,$$

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_p + \vec{V}_z = V_r\vec{r}_o + V_p\vec{p}_o + V_z\vec{k} \,,$$

$$V_r = \dot{r} \,,\ V_p = r\dot{\varphi} \,,\ V_z = \dot{z} \,,$$

-V_r -radijalna, V_p -poprečna (cirkularna, transverzalna) i V_z -aksijalna brzina tačke. Intenzitet vektora brzine tačke $\vec{V}$ tada je određen sa

$$V = \sqrt{V_r^{\,2} + V_p^{\,2} + V_y^{\,2}} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$$

dok su pravac i smer brzine tačke u odnosu na ose polarno – cilindarskog koordinatnog sistema, koje su određene jediničnim vektorima $\vec{r}_o$, $\vec{p}_o$ i $\vec{k}$, dati sa

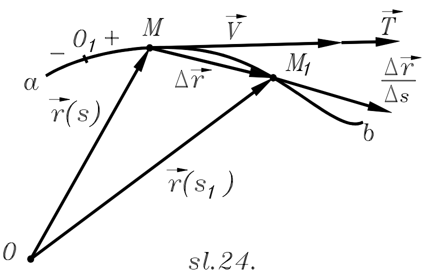
$$cos\alpha_r = \frac{\dot{r}}{V} \,,\ cos\alpha_p = \frac{r\dot{\varphi}}{V} \,, cos\alpha_z = \frac{\dot{z}}{V} \,.$$

Kada se tačka *M* kreće u ravni tada je

$$V = \sqrt{V_r^{\,2} + V_p^{\,2}} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} \,,\quad tg\theta = \frac{V_p}{V_r} = \frac{\dot{r}}{r\dot{\varphi}} \,.$$

Prirodni način određivanja brzine tačke

Posmatra se kretanje tačke *M* po poznatoj trajektoriji *ab*. Neka je na njoj izabran koordinatni početak O_1 i neka je izvršena orijentacija lučne koordinate *s*. Pored ovih elemenata, neka je poznat i zakon kretanja tačke po trajektoriji $s = s(t)$. Uočavaju se dva bliska položaja posmatrane tačke *M*: položaj u kome se tačka nađe u trenutku *t*, a koji je određen sa $s = s(t) = \overset{\frown}{O_1M}$ i položaj u kome se tačka nađe u trenutku t_1 koji je određen kao $s_1 = s(t_1) = \overset{\frown}{O_1M_1} = s + \Delta s$. Kako svakoj tački putanje odgovara određena lučna koordinata *s* i određeni vektor položaja $\vec{r}$, tada se može pisati da je



sl.24.

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}[s(t)].$$

Na osnovu definicije brzine sledi

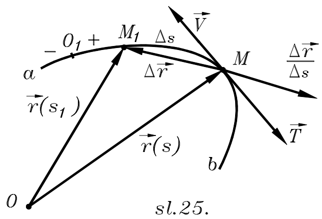
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\vec{r}}{ds} \,.$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \,.$$

Intenzitet vektora $\frac{d\vec{r}}{ds}$ određen je sa

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{M_1 \to M} \frac{\overline{MM_1}}{\overset{\frown}{MM_1}} = 1 \,.$$

Pravac vektora $\frac{d\vec{r}}{ds}$, određen je graničnim pravcem vektora $\Delta\vec{r}$. U posmatranom graničnom procesu, kada tačka M_1 teži tački *M*, sečica $\overline{MM_1}$ prelazi u tangentu na putanju u tački *M*. Iz toga sledi da je vektor $\frac{d\vec{r}}{ds}$ pravca tangente na putanju u datoj tački.



Pri određivanju <u>smera vektora</u> $\frac{d\vec{r}}{ds}$ zapaža se da je posmatrano kretanje tačke *M* u smeru porasta lučne koordinate $(\Delta s > 0)$ i tada je vektor $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ imao smer vektora $\Delta\vec{r}$. Ako se posmatra kretanje tačke *M* kod koga je $\Delta s < 0$ zapaža se da tada vektor $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ ima suprotan smer od vektora $\Delta\vec{r}$. To znači da je smer vektora $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$ onaj u kome raste prirodna (lučna) koordinata.

Iz prethodnih razmatranja sledi da se radi o vektoru jediničnog intenziteta, pravca tangente na putanju u datoj tački, koji je usmeren u smeru rasta lučne koordinate, zbog čega je očigledno da je reč o jediničnom vektoru tangente $\vec{T}$ u posmatranoj tački, tj.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T} \, ,$$

pa je

$$\vec{V} = \dot{s}\vec{T} \, .$$

Iz (2.82) se zaključuje da je projekcija brzine tačke na pravac tangente jednaka prvom izvodu lučne koordinate po vremenu, tj.

$$V_T = \dot{s} \, .$$

Pri rešavanju konkretnih problema javlja se potreba da se izračuna pređeni put tačke koja u toku kretanja menja smer. U tom slučaju je potrebno iz uslova $V_T(t) = 0$ odrediti sve trenutke $(t_1, t_2, ..., t_n)$ kada tačka menja smer kretanja. Ako su sa $(s_o, s_1, s_2, ..., s_n, s)$ označene vrednosti lučne koordinate koje odgovaraju trenucima $(t_o, t_1, t_2, ..., t_n, t)$, pređeni put *S* tačke u intervalu vremena $(0, t)$ određen je tada sa

$$S = |s_1 - s_o| + |s_2 - s_1| + ... + |s - s_n| \, .$$