1. Rešenja zadataka pošaljite na email adresu:

   numericke.metode.metode@gmail.com

   do 23:59 časova 03.02.2015. godine. Rešenja zadataka pristigla sa zakašnjenjem neće biti uzimana u razmatranje, bez obzira na izgovor.

2. Prilikom slanja email-a u polju subject navedite sledeću nisku znakova:

   KMA.NM.999/GG

   gde je:

   - KMA-oznaka Katedre za Matematiku
   - NM-oznaka za Numeričke metode
   - 999/GG-broj indeksa studenta gde se unosi vodeća nula

   Na primer, ako Vam je broj indeksa 23 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

   KMA.NM.023/11

   Slično, ako Vam je broj indeksa 124 i neka ste upisani 2011 godine, tada u subject-u treba da stoji:

   KMA.NM.124/11

3. Rešenje zadataka: program u Matlabu, slike kao ilustracije u JPEG formatu, tekst otkucan u Wordu, pa eksportovan u pdf, ili skenirana rešenja pisana na papiru, pošaljite kao attachment Vašeg email-a, tako što sve fileove vezane za jedan zadatak zapakujete u zip arhive sa imenima

   zadatak01.zip, zadatak02.zip, zadatak03.zip, zadatak04.zip

4. Poslednji pristigli Vaš email je važeći i on će biti pregledan, dakle, mora sadržati rešenja svih zadataka koja želite da pošaljete.

5. Svako prepisivanje biće sankcionisano, pored toga, morate usmeno odbraniti rad koji ste poslali.

6. Rešenje svakog zadatka donosi 20%.

Univerzitet u Beogradu 02.02.2015.

Mašinski fakultet

Pismeni ispit iz Numeričkih metoda

1. Odredjujemo broj značajnih cifara kojim je odredjena vrednost `log` na intervalu $[.001, 5]$ pod pretpostavkom da je argument funkcije zadat sa 5 značajnih cifara.

   a) Odrediti teorijski broj značajnih cifara vrednosti funkcije `log` u funkciji broja značajnih cifara argumenta funkcije.

   b) Napisati `script` u `Matlabu` i prikazati grafičku zavisnost broja značajnih cifara funkcije `log` u funkciji vrednosti argumenta sa korakom `.0005`

   c) Nacrtati na jednoj slici teorijski dobijenu ocenu i eksperimentom. Uporediti vrednosti dobijene teorijski i eksperimentom.

   Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite teorijko razmatranje a), `script` file i sliku pod b), sliku i komentar pod c).

2. Pretpostavimo da rešavamo sistem linearnih jednačina

$$Ax = b, \quad A = \begin{bmatrix} 1. & .1 & 0 & \dots & 0 \\ .1 & 1. & .1 & \dots & 0 \\ 0 & .1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

   reda 40, gde je vektor b odredjen iz uslova $b = Ax^*$, gde je vektor x^* vektor sa svim koordinatama postavljenim na jedan. Pretpostavimo da elemente matrice A odredjujemo merenjem i da je rezultat merenja matrica B_i.

   a) Za zadato $i = 1, \dots, 15$ formirati matricu B_i koja ima elemente jednake nula gde i matrica A, dok su ostali elementi matrice B_i zadati sa barem i značajnih cifara u odnosu na elemente matrice A. Koristeći funkciju `linsolve` odrediti rešenje sistema linearnih jednačina $B_i x_i = b$ i odrediti broj značajnih cifara kojim rešenje x_i aproksimira rešenje x^*. Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara rešenja x_i u funkciji broja značajnih cifara elemenata matrice B_i, drugim rečima od i.

   b) Dati teorijsku procenu minimalnog broja značajnih cifara kojim rešenje jednačine $B_i x_i = b$ aproksimira x^* u funkciji broja značajnih cifara matrice B_i. Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara rešenja x_i u funkciji broja značajnih cifara matrice B_i.

   c) Uporediti rezultate dobijene pod a) i b) i diskutovati eventualna slaganja ili odstupanja.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite `script` file koji formira matrice A, B_i, $i = 1, \ldots, 15$, b, x^*, i x_i, $i = 1, \ldots, 15$, i crta sliku u delu pod a), teorijsko razmatranje i sliku u delu pod b), diskutujete slaganja/odstupanja pod c).

3. Za odredjivanje vrednosti integrala

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2},$$

koristićemo uopštenu formulu srednje tačke.

a) Napisati `script` file u `Matlabu` koji odredjuje aproksimaciju vrednosti integrala I sa 1, 2, 4, 8, 16, 32 i 64 podintervala. Nacrtati grafik zavisnosti broja značajnih cifara aproksimacije vrednosti integrala u funkciji $\log_2 N$, gde je N broj podintervala.

b) Odrediti teorijsku procenu vrednosti greške koja nastaje prilikom odredjivanja vrednosti integrala. Nacrati teorijski procenjen najmanji broj značajnih cifara u funkciji $\log_2 N$, gde je N broj podintervala.

c) Vrednosti dobijene u delu zadatka pod a) smestiti u prvu kolonu matrice `r`, redom prema broju upotrebljenih podintervala počev od jednog podintervala ka 64 podintervala. Zatim odrediti elemente matrice `r`, na i ispod glavne dijagonale, na sledeći način

```
r(j,k)=r(j-1,k-1)+1/(4^(k-1)-1)*(r(j-1,k-1)-r(j-1,k-1)), j=k,...,7, k=2,...,7.
```

Elemente iznad glavne dijagonale matrice `r` na menjamo, jer nam nisu potrebni. Pod pretpostavkom da elementi matrice `r` na glavnoj dijagonali aproksimiraju vrednost integrala I nacrtati zavisnost broja značajnih cifara u funkciji $\log_2 N$, gde je N broj podintervala, dakle redni broj vrste matrice `r`. Na istom grafiku nacrtati grafik broja značajnih cifara dobijenih u delu zadatka pod a) i dobijen opisani način. Koja je metoda bolja, s obzirom da i jedna i druga koriste iste podatke.

Metod integracije u delu pod c) se naziva Rombergova integracija.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite `skcript` file i sliku pod a), teorijsko razmatranje i sliku pod b), `script` file,sliku i poredjenje metoda pod c).

4. Pretpostavimo da rešavamo Cauchyev problem

$$y' = -5y, \quad y(0) = 1.$$

a) Rešiti egzaktno Cauchyev problem.

b) Napisati funkciju u `Matlabu` koja rešava Cauchyev problem koristeći Adams-Bashfortovu metodu

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n).$$

Potrebnu startnu vrednost y_1 izračunati koristeći egzaktno rešenje dobijeno u delu pod a). Rešiti Cauchyev problem, sa $h = .001$ i nacrtati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije y na intervalu $[0, 2]$. Objasniti oblik krive.

c) Za $h_i = 2^{-i}$, $i = 0, \ldots, 5$, nacrati broj značajnih cifara u funkciji argumenta funkcije y. Na osnovu slike odrediti koje vrednosti koraka h_i imaju veliki gubitak značajnih cifara sa porastom x, a za koje vrednosti koraka h_i je taj gubitak znatno manji. Objasniti pojavu pojmom stabilnosti metoda.

Napomena: zadatak je u potpunosti rešen ako priložite rešenje Cauchyevog problema pod a), napisanu funkciju i nacrtanu sliku pod b) uz objašenjenje slike, sliku i objašnjenje ponašanja metoda za različite vrednosti koraka pod c).

prof. dr Aleksandar Cvetković